1 7 164

Digitized by Google

DE CONSTRUCTIONE ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PRIMI GRADUS

AUTHORE

GABRIELE MANFREDIO

PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI

Philoſophicæ, quæ in Patria, eſt Academiæ Socio Ordinario.

ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO

BONONIENSI SENATUI.

BONONIÆ MDCCVII.

Typis Conſtantini Piſarii. Superiorum permiſſu.

Illuſtriſſimi , atque Ampliſſimi *PATRES.*

MAgna eſt, Illuſtriſſimi, atque Ampliſſimi PATRES, quam bonarum artium præſidio, & augmento conferre ſoletis non cura modo, & vigilantia, ſed & utilis atque opportuna opera, & efficax auxilium. Florentiſſimam nempè hac in Urbe Academiam habetis, Veſtraque ſuſtinetis munificentia, quam unicè placendi Vobis viam concivibus Veſtris intento veluti digito PATRES prudentiſsimi monſtratis, & dulce ſimùl incitamen-

Digitized by Google

tum præmii ſpem additis, & præmium ipſum, ſola meritorum ratione attenta, identidèm indulgetis; Quo ipſo, & nobis virtutum ſtudia incenditis,& vetus doctiſſimę Civitatis nomen ſervatis, & maximam apud exteras ipſas nationes gratiam initis,cum clariſſimos ex Veſtro hoc Lyceo Viros promitis, & per ipſas rogati ſpargitis, & elargimini; ut ea quibus noſtra hæc ſecula abundant Scientiarum incrementa, Vos etiam, Veſtrumque hoc Athenæum non ultimum quaſi fontem agnoſcant. Qua propter id nobis, quibus hac in Urbe naſci, Veſtroque, Illuſtriſſimi, ac Ampliſſimi VIRI, benefitio meliores inter Scientias educari contigit grati animi iniungit officium, ut generoſam Indolis Veſtræ magnitudinem prædicemus, & Veſtrum eſſe quidquid hac in Urbe à doctiſsimis, quos Vos ipſi aſsignatis Præceptoribus noſtris didicimus, unanimiter fateamur. Atque id quidem in primis, quod Opuſculo huic materiam facit omni titulo Veſtrum eſſe nemo inficiabitur; eſt enìm hæc ipſa Ars, quam hìc primùm à rudimentis, ac à prima

veluti fœtura excitavit Celeberrimus P. Bonaventura Cavallerius, quem Vos ipſi maxima, qua ſoletis conſilii maturitate ad Vos accerſiſtis, atque accerſitum impenſa Liberalitate foviſtis, Veſtrumque effeciſtis. Crevit illa deinde, & ad exteros migravit; unde iam, mutato non tantum nomine, ſed & Analyticam induta ſpetiem, & quantum in melius converſa! Italiæ nunc primùm Veſtrum precata patrocinium ſe denuò redux committit tenui hoc liberculo excepta, qui primus in omni Italia Analyſim hanc ex profeſſo traditurus prodit, atque vulgatur. Dum igitùr Ampliſſimo Veſtrorum Cœtui hoc qualecumque ſtudiorum ſpecimen, quæ Veſtro hoc in Gymnaſio renovantur humillimè exhibeo, non quidem quaſi quidquam Vobis largiturum me ſiſto, ſed quod unicè Veſtrum eſt tandem Vobis ipſis redditurus accedo, nec niſi timidus, oblatæ ſcilicet rei tenuitate perſpecta. Nec tamen id mihi minorem fiduciam facit, fore ſiquidem ut benigno aſpiciatis Vultu opuſculum, quo Veſtrum imploro auctorabile patro-

Digitized by Google

cinium; ea nempe eſtis Clementia, ut quæ paſſìm Veſtro firmanda præſidio hoc de Lyceo ad Vos quotidiè confluunt tamquam ſi Veſtra non eſſent humaniſsimè excipiatis, at quaſi non Veſtra modo, ſed & Veſtrum pars etiam forent potentiſsima protectione tueamini. Hanc operi huic, hanc mihi ipſi, Patres Illuſtriſſimi, atque Ampliſſimi exopto, & ſupplex poſco, & confido etiam, tanto me auctum auſpicio majora, & Veſtro digniora nomine, & multa, qua Vos veneror obſervantia in dies daturum. Deus Optimus Maximus ſervet Vos diù Illuſtriſſimi Viri, & Ampliſſimi Patres, fęlici Scientiarum progreſſui, Urbiſque fauſto Regimini natos

DD. VV. Illuſtriſs.rum, atq; Ampliſs.rum

Bononiæ Kal. Ianuar. 1707.

Humillimus Devotiſſimus, atq; Addictiſſimus Servus, & Cliens

Gabriel Manfredi.

Digitized by Google

PRÆFATIO.

TRadimus in hoc opuſculo Conſtructionem Æquationum Differentialium primi Gradus ex collectis, & in ordinem diſpoſitis, & analyticè demonſtratis ſpeciminibus, quæ clariſſimi noſtro hoc ævo geometræ in libris ſparsìm, nullo quidem ordine, nullave methodi ratione habita, prout paſsìm invenerunt publico ſunt clargiti. Ac ne quidem totam hanc funditùs materiam exhauſtam eſſe ſperamus, eſt enìm illa, non viribus modò noſtris, quas infirmas admodum fatemur, adhùc imperuia, ſed quantum huc uſque conſtet, incompleta adhuc, & mutila, ut hac de re tractatum abſolutiſſimum ex iis, quæ ad nos uſque pervenerunt inventis fruſtrà deſideres. At verò, cum plura tamen extent à recentioribus ad methodi ſaltèm exordium conſcripta, eaque non quidem ordinatìm, & ad unum quaſi finem collimantia, ſed ſolo inventionis ordine ſervato in Literatorum diariis, quæ quotidiè vulgantur diligentiſſimè inſerta ſint, ac præcipuè in actis Eruditorum, quæ Lipſiæ accuratiſſimi collectores imprimunt, ac in actis Regiæ Scientiarum Academiæ, ac alibì proſtent, fas erat, ut hæc omnia clariſſimorum virorum Schediaſmata novam omninò artem claudentia, & ferè exemplis pluſquam regulis indicantia in ordinem revocarentur, & ab occultis Analyticis fontibus immediatè derivarentur, ut ſi methodum completam non ſuppeditent, id ſaltèm quod continent, quod nec modicum eſt, nec inutile, præ oculis poneretur, ad commodiorem facilitatem deduceretur, atque ingens labor ijs demeretur,

retur,

Digitized by Google

retur, quibus hæc cordi ſunt, quem generaliorum regularum coniecturæ, & deductiones per preſſa ut plurimùm exempla particularia injungunt, atque præſeferunt; dùm interim Clariſſimi in hoc calculo primi inventoris Leibnitzij opus de ſcientia Infiniti, quo id totum pro re nata à principijs uſque dilucidetur expectamus, atq; otium tanto, tamq; utili operi neceſſarium apprecamur.

Libellus itaque noſter Clariſs. Marchionis Hoſpitalii celeberrimum opus de Infitè Parvis excipiet, non quidem quaſi ab illo ſecundus haberi poſſit, qui tanto diſcriminis intervallo ab illo degreditur, ſed quod poſt calculi differentialis fundamenta ibi dilucidè adeò perſpecta integralis calculus, de quo hic tractatio qualiſcumque inſtituitur Geometriæ curſum peragenti ſe ſiſtat. Sicuti enim ſeriei cujuſvis quantitatum continuè fluentium, hoc eſt variabilium, ſivè illæ ſint cujuſvis Curvæ ordinatæ, ſivè quævis alia ſeries aſſignatur per differentialem calculum fluxio, hoc eſt minimi incrementi quantitas, ſic viciſsim in noſtro calculo integrali, data fluxione, ſivè differentiali quantitate invenitur quantitas, cui competat, atque indè quadraturæ ſpatiorum, rectificationes curvarum, cubaturæ ſolidorum, ſuperficierumque complanationes derivantur, ſed & Curvarum innumerabilium, ex data Tangentium conditione, & quamplurimis alijs proprietatibus deſcriptiones efficiuntur, quas calculi integralis expertibus nullatenùs in poteſtate eſſe crediderim. Neque ideò opuſculum in ordine ad uſus integralis calculi in his præſtandis diſpoſuimus, Clariſs. Hoſpitalium imitati, qui varias laudati operis ſui ſectiones per diverſos differentialis calculi uſus diſtinguit, tùm, quod id non ità pridèm Clariſs. Carrè egregiè omninò in opere ſuo præſtiterit, cum verò, quod multa ad integralem calculum pertinen-

tia,

tia, qualis eſt redductio æquationum differentialium, & alia huiuſmodi commodiùs in ordinem venire viderim ſi totum opus ad earundem differentialium æquationum conſtructionem referendo dirigerem. Illud propterea in VI. omninò Sectiones partitus ſum. Prima viam oſtendit, qua ex datis quæſitæ alicuius curvæ proprietatibus nonnullis ad æquationem illius differentialem perveniri poſſit; neque enim de illis ordienda erat diſſertatio, niſi priùs ratione qua ad illas quandoque perducamur ſatis perpenſa. Poſtquam verò ad talem æquationem perducti fuerimus, ſiquidem algebraicè fuerit integrabilis ad ſecundam pertinet Sectionem, quò ſpectat quidquid de ſpatijs algebraicè quadrabilibus, curvis rectificabilibus &c. huc uſque ſit proditum. Si verò æquatio algebraice non ſit integrabilis, vel unicam tantum indeterminatarum, vel ambas (præter utriuſq; differentiale, quod in omni æquatione differentiali haberi neceſſum eſt) continebit. Tertia Sectio conſiderat ex illis, quæ unicam tantum habent indeterminatam illas tantummodò in quibus differentialia primam dimenſionem non ſuperant; quarta verò illas, in quibus differentialia ad quamvis poteſtatem ſint elevata. Quinta porrò æquationes conſtruit, quæ utramq; indeterminatam cum habeant, ſeparabiles illæ tamen ab invicem exiſtunt. Sexta demùm varias ex illis proſſequitur, quæ ſuas sic ſibi mutuò implicitas indeterminatarum expreſſiones ſortiuntur, ut multo opus ſit artificio ad earum ſeparationem inſtituendam, & conſtructionem ex indè geometricè derivandam.

Atque hoc quidem id totum eſt, quod præſenti opuſculo peragitur, quo ſane integralis calculi prima tantum rudimenta adumbrare præſumimus, hunc porrò in finem, ut ſi quis poſt

diſſerentialem ulteriùs pergere, & hanc analyſim intrinſecùs perluſtrare velit, facem veluti præferamus, & prima ſaltèm pandamus veſtibula, quod novam ſcientiam ingreſſuro nullius omninò uſus eſſe non poterit. Speramus etenim poſtquam ea ritè intellecta fuerint, quæ principijs neceſſaria judicantes ex actis Lipſienſibus explicanda ſelegimus ad reliqua etiam Æquationes differentiales primi gradus reſpicientia, quæ inexplicata reliquimus ſtratam fore viam, vel certè ſuperabilem; neque enim omnia, quæ in actis extant proſequi vel opportunum erat, vel etiam poſſibile, quandoquidem nova, & nova quotidiè vulgantur, nec omnia finito hoc, & terminum habente opuſculo claudi poſſent. Quin & à quo vulgando libercul o inſiſtimus acta Annorum 1702., 1703. *ad nos pervenerunt, ac in illis Schediaſmata Leibnitziana Menſium Maii, & Ianuarii, quæ quidem ſcientiam latè promovent, & ſola Opuſculo ſufficientem materiam præbere poſſent. At nobis, quibus brevitati parendum erat, & iam totius opuſculi textura erat abſoluta ab his fuit abſtinendum, ut & à quamplurimis, ea tantùm attigiſſe contenti, quæ Tyronibus primam lucem inducere poſſint, quorum tantum gratia labor hic eſt inſtitutus.*

Vſum porrò calculi quod attinet, is ſanè ingens eſt, & ad omnes Matheſeos partes, maximo illarum incremento protenditur. Eſt enim univerſa Analyſis nil aliud, quam ipſa genuina, & infallibilis veritatis inveniendæ methodus, quam adeò ſi Mechanicis, Staticis, Nauticis, Aſtronomicis, cæteriſque Mathematicis uſibus applices, innumeram veritatum ſegetem colliges. Atque hinc tot recentiorum Geometrarum

in

in ipſis etiam Phyſico-mathematicis tractatibus inventa derivantur, quæ noſtrum hoc ſeculum præ cæteris ſcientiarum, artiumque incremento inſigne efficiunt. Hinc Horologiorum æquabilitas, elaterum & catenarum curvitas, nauium opportuniſſima conſtructio, aquarum per cujuſvis figuræ foramina fluentium determinatio, orbium planetarum exactiſſima inventio, & plurima ad humanos uſus perquam neceſſaria derivantur. Nos certè materiam humanis civilibuſque uſibus accomodatam hic tradituros adeò non diffidimus, ut Philoſophicæ quam hic Bononiæ in Ædibus Domini Com. Marſigli habemus Academiæ, rem minimè inutilem oblaturos ſperemus, & curæ qua Dominus ipſe Comes ſtudia Philoſophica impensè, & generosè fovet, & qua Doctiſſimi Coacademici ea quotidiè augere ſtudent, quid opportunum pro inſtituti noſtri ratione collaturos exiſtimemus. Sed & illud in primis omni utilitate majus emolumentum accedit, ut recta ratiocinandi methodo, & continua in id, quod agitur animi adverſione, Intellectus maturiori aſſueſcat diſcurſus rationi, neque jàm, aut verbis, aut fallacibus moveatur coniecturis, ſed veræ rationis vim, & robur ubique expetat, atque requirat. Quod quantæ ſit utilitatis, & fructus non in Geometriæ tantum, ſed & in omni civilis vitæ commercio nemo ſanè non videt.

Illud tandèm hic iterùm, atque iterùm teſtatum volumus, opuſculum hoc qualecumque aliorum penitùs cogitatis refertum illis omninò adſcribendum eſſe, & tribuendum. Debentur enìm omnia celeberrimorum Leibnitzij, Bernoulliorum Fratrum, Hoſpitàlii, Varignonii, & P. Grandi in

Piſano Lyceo profeſsoris egregij ingenioſiſsimis inventis, vel ex Libris erutis, vel per Literas nobiſcum humaniſſimè communicatis. Ordinem nos addidimus, & Analyſim ubi de illa deeſset, ad eorum utilitatem, qui in hiſce mirabilibus Geometriæ arcanis experiri ſe volent adiunximus, aliàs fortaſsè nonnulla, quæ huius calculi interiora reſpiciunt, quæque indigeſta adhuc verſamus, favente Deo, publici juris facturi.

SE-

Digitized by Google

SECTIO PRIMA.

Quomodo ex datis quæſitæ alicujus Lineæ proprietatibus nonnullis, ad æquationem illius Curvæ differentialem poſſit perveniri.

DEFINITIONES.

Prima Definitio.

1 QUantitatem quamvis p dari per aliam, vel alias quaſvis x, z, &c. nil aliud eſt, quam notum eſſe quomodo, data hac, vel his x, z, &c. ad cognitionem illius debeat procedi. Hinc ſi ex datis quantitatibus x, z, &c. quantitas p nota fieri poſſit ope lineæ determinati generis, vel æquationis determinati gradus, dicetur p dari per x, z, &c. algebraicè. Sin minus, dicetur dari tantùm tranſcendenter. Sic $x^3 - axx$, datur per x, & a algebraicè. Peripheria verò Circuli datur per Radium tantùm tranſcendenter.

Secunde Definitio.

2 QUantitatem verò quamvis h; ſic dari per aliam quamvis k, ut tertia quæcumque l datur

datur per quartam m, idem eſt, ac eodem modo ex ſecunda k deveniri in cognitionem primæ h, quo ex quarta m devenitur in cognitionem tertiæ l. Vel clariùs; ſi ſint quatuor quantitates h, k, l, m, tales ut in prioris h valore, loco literæ k ſubſtituendo m, prodeat l, dicetur tunc h ſic dari per k, ut l datur per m; exemplum ſunto $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$, x, $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$, y, quæ quatuor quantitates tales ſunt, ut in priori, ſi loco ſecundæ x ſubſtituatur quarta y, prodibit tertia $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ dicetur igitùr $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ ſic dari per x, ut $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ datur per y. Nuncque clarius intelligitur prima definitionis hujus expoſitio; patet enim, quod ex litera x devenitur in cognitionem quantitatis $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ eodem modo, quo ex litera y devenitur in cognitionem quantitatis $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$, ſivè quantitas $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ ſic componitur ex x, ut $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ componitur ex y, quia ut data x innoteſcat $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ eadem operatio, tam geometrica, quam arithmetica eſt inſtituenda, quæ & inſtitui debet ut cognita y ad quantitatis $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ cognitionem deveniamus.

De-

Digitized by Google

Definitio tertia.

3 ÆQuatio differentialis primi gradus pro aliqua Linea, ſive alicujus Lineæ eſt ęquatio exprimens relationem quam habent ad invicem prima differentialia coordinatarum illius Lineæ. Nomine verò coordinatarum intelligo duas indeterminatas datæ naturæ, quarum data ſit poſitio ad ſingula quæſitæ Lineæ puncta ſufficienter determinanda. Sic $adx - 2ydy = 0$ eſt æquatio differétialis primi gradus pro parabola communi, quia exprimit relationem differentialium dx, dy linearum x, & y, quas ſummimus pro rectis ſe invicem in angulo recto decuſſantibus ut in Carteſiana Analyſi moris eſt; Verùm eadem $adx - 2ydy = 0$ non eſſet ęquatio differentialis pro curva exempli gratia, cujus y quidem eſſet ordinata, x verò eſſet ſubtangens, quia ordinata & ſubtangens non ſunt duæ coordinatæ pro curva deſcribenda, cum data etiam earum longitudine non innoteſcat poſitio ipſarum, quò quæſitæ Lineæ puncta ſufficienter determinentur.

4 Adverto tantùm, quod hæc differentialia coordinatarum, in omni æquationis differentialis membro eundem habitura ſint numerum dimenſionum, ut ſi in uno membro adfuerit dx^3; in aliis aderit quidem aut dy^3, aut $dx^2\,dy$, aut $dxdy^2$, ſed nullibì aderit dy^2 tantum, vel dy, vel $dydx$; uno verbo nullum aderit in æquatione membrum in quo diffe-

ferentialia eundem dimenſionum numerum ſimul ſumpta non efficiant. Ratio evidens eſt ex eo, quod membrum in quo quantitates differentiales majorem numerum dimenſionum ſortirentur, tutò deleri poſſet ex æquatione, eſſet enim cæteris infinitè minus, ac proinde nil adderet illis. Hæc ſatis nota ſunt, nec aliquid novi tradimus, undè ad rem properantes aggrediamur modum, quo hæ differétiales æquationes ex datis quibuſdam proprietatibus Linearum ſint eruendæ.

Prop. prima.

Fig. 1. SI detur æquatio exprimens relationem BT ſubtangentis deſcribendæ curvæ AD, in axe AB, aut ſubnormalis BC, aut tangentis DT, aut normalis DC, ad coordinatas AB, BD, & conſtantes quaſvis, aut ad quantitates, quæ per coordinatas, & conſtantes quomodocumq; dentur; invenire æquationem differentialé primi gradus curvæ deſcribendæ.

5 Quoniam valor ſubtangentis BT in omni curva cujus axis ſit Linea recta (vocando abſciſſas AB $=$ x quæ ſcilicet in axe ſummuntur, & ordinatas BD $=$ y) eſt $\frac{ydx}{dy} = s$, & BC $= \frac{ydy}{dx} = r$, & DT $= \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} =$ t, & DC $= \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = n$ opus erit tantùm hos valores ſubſtituere in locis Literarum s, t, r, n in æquatio-

tione data exprimente relationem harum Linearum ad coordinatas, vel ad quantitates, quę per coordinatas, & conſtantes quomodocumque dantur, & æquatio reſultans erit manifeſtè æquatio differentialis primi gradus curvæ quæſitæ.

COROLL.

6 MAnifeſtum eſt etiam talem æquationem differentialem inventum iri ſi data æquatio non Literas tantum s, t, r, n, cum coordinatis, & conſtantibus, ſed & alias harum loco, vel cum illis contineret, quarum valores aſſignabiles ſint in terminis quomodocumque per dx, dy, & coordinatas, & conſtantes affectis, quales ſunt innumeræ, ut AG perpendicularis à vertice ad tangentem (cujus valor eſt $\frac{ydx-xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$) AH perpendicularis per verticem ad normalē DC (quæ exprimitur $=\frac{ydy+xdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$) intercepta AE inter tangentem, & verticem in axe conjugato (quæ eſt $=\frac{ydx-xdy}{dx}$) & complures aliæ functiones (ut vocant) ipſius curvæ, quæ ex tangentis determinatione cum dependeant, differentialia dx, & dy in ſuis valoribus prçſeferunt. Nemini puto remoram faciet horum valorum inventio pro Lineis AG, AH, AE. AG eruitur ex triangulorum ſimilium TBD,

Digitized by Google

TAG analògia TD, DB :: TA, AG. Similiter AH, eſt quarta poſt CT, TD :: CA, propter ſimilia CTD, CAH. Tandèm AE habebitur ſi fiat TB, BD :: TA, ad quartam, quia ſimilia ſunt triangula TBD, TAE.

COROLL. II.

7 SI in Æquatione data exprimente relationem Linearum s, t, r, n aut ſimilium, quas præced. Coroll. conſideravimus ad conſtantes, & coordinatas, vel ad quantitates, quæ per conſtantes, & coordinatas quomodocumque dentur, adeſſent differentialia ds, dt, dr, &c. eſt manifeſtum, ęquationem quæ oriretur ſubſtitutis pro s, t, r, &c. earum valoribus & pro ds, dt, dr, &c. earum valoribus differentialibus, fore æquationem differentialem quidem, ſed non primi gradus, quia ds, dt, dr, &c. includunt differentialia ſecunda ddx, ddy. Debet igitùr data ęquatio eſſe Algebraica, ſaltem quo ad lineas t, s, r, &c. ut differentialis æquatio quæſita ſit primi gradus, ſecùs fiet altiorum graduum; de æquationibus verò differentialibus ſecundi, aut altiorum ordinum agere non eſt animus.

Exemplum.

8 SIt æquatio r, s, t, n, $= a^4$, productum nempè quatuor Linearum, BC, BT, TD, DC, debeat

eſſe

eſſe in omni quæſitę Lineæ puncto eadem conſtans a^4. Subſtitutis ergò pro r,s,t,n, earum valoribus ſu- *(num 5)*
pra aſſignatis fiet ęquatio $y^4dy^2+y^4dx^2=a^4dxdy$, quę eſt æquatio differentialis curvę quęſitæ. Sanè ſi quęras hujus lineę ſubtangentem ex data hac ęquatione differentiali juxtà methodum vulgatam invenies illam $x=\frac{2y^5}{a^4+\sqrt{a^8-4y^8}}$. Erit igitùr tangens $\frac{aay\sqrt{2}}{\sqrt{a^4+\sqrt{a^8-4y^8}}}$ Subnormalis verò erit $\frac{a^4+\sqrt{a^8-4y^8}}{2y^3}$, & normalis $=\frac{aa\sqrt{a^4+\sqrt{a^8-4y^8}}}{y^3\sqrt{2}}$, quarum quatuor linearum productum eſt a^4 prorſus ut debuerat.

Exemplum II.

9 SI fuerit ęquatio $r+x=\sqrt{xx+yy}$, ità ut triangulum ACD debeat ſemper eſſe Iſoſceles, & ejus latera AD, AC ęqualia, differentialis ęquatio erit (ſubſtituto $\frac{ydy}{dx}$ pro quantitate r) $\frac{ydy}{dx}+x=\sqrt{xx+yy}$ unde $ydy=dx\sqrt{xx+yy}-xdx$. Si velis r ęquari ipſi EA, erit $\frac{ydx-xdy}{dx}=\frac{ydy}{dx}$ ſivè $ydx-xdy=ydy$.

Exemplum III.

10 SI debeat $t + n$ eſſe $= a$, ſubſtitutis pro t, & (*num.5*) n, earum valoribus $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$, & $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, erit (demptis irrationalibus) ęquatio quæſita $yydx^4 + 2yydx^2dy^2 + yydy^4 + 2yydx^3dy + 2yydy^3dx = aady^2dx^2$. Eâdem regula ſi velis ęquationem differentialem curvæ in qua $tt + nn + yy = aa$ erit illa $yydx^4 + yydy^4 + 3yydx^2dy^2 = aady^2dx^2$. Si porrò debeat eſſe DE, ad EA, in ratione conſtanti p ad q, invento valore lineę ED, ex triangulo EFD rectangulo, qui erit $\frac{x\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, erit analogia $\frac{x\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, $\frac{ydx - xdy}{dx}$ :: p, q, undè æquatio ab omni ſigno radicali explicita erit $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppyxdxdy = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$.

Exemplum IV.

11 SI jubeatur eſſe in quęſita curva $s^m, x^n :: a^m, b^n$, fiet ęquatio $y^m b^n dx^m = x^n a^m dy^m$, ſivè $b^{\frac{n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx = \frac{ady}{y}$. Quod ſi malis eſſe $x^n + y^m = s^r$, ęquatio erit $x^n dy^r + y^m dy^r = y^r dx^r$. Similiter & ſi detur æquatio $t^n = y^m a^{n-m}$, poſt ſubſtitutionem, & reductionem ad communem denomina-

na-

natorem, & diviſionem ęquationis per y^n ſi extrahatur utrinque radix à numero *n* denominata, & deindè quadretur utraque æquationis pars, reducetur per antitheſim æquatio ad $dx^2 = y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}} dy^2 - dy^2$ undè $dx = dy \sqrt{y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}} - 1}$, quæ erit æquatio curvæ quæſitę ad ſimpliciores terminos reducta. Haud aliter, ſi data æquatio jubeat TB eſſe quantamcumq; proportionalem poſt DB & AB ſivè $s = \frac{x^{m-1}}{y^{m-2}}$, fiet æquatio $y^{m-1}dx = x^{m-1} dy$. Poſita deniquè æquatione $s^m + r^n = a$ fiet æquatio $y^m dx^{n+m} + y^n dy^{n+m} = ady^m dx^n$. Hæ omnes æquationes inveniuntur ſubſtitutis pro s, r, t, earum valoribus, quos ſuprà aſſignavimus, & procedendo deinde circà æquationes inventas per has ſubſtitutiones, juxtà notas regulas pro æquationum reductione. (*num.5*)

Exemplum V.

12 SI datam æquationem ingrediantur etiam quantitates tranſcendentes, ſcilicet tranſcendenter tantùm datæ per x, vel y, vel utramque, & conſtantes, non erit difficiliùs æquationem obtinere differentialem. Ut ſi $s = p$, ſitque p arcus cujus ſinus ſit y in circulo cujus radius ſit a, data quædam conſtans; quo in caſu p datur tranſcendenter per y,

&

& conſtantem a. Opus erit tantùm pro s ponere $\frac{ydx}{dy}$, & fiet $dx = \frac{pdy}{y}$ æquatio differentialis quæſita in qua primæ tantum differentiæ reperiuntur cum p ſit integrale ex quantitate $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, ità ut æquatio $dx = \frac{pdy}{y}$ ſcribi poſſit $dx = \frac{dy}{y}\int\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$ æquatio exprimens relationem primorum differentialium coordinatorum quæſitæ curvæ. Et patet quomodò ſi p non ſolum detur per y, ſed etiam eſſet quantitas, quæ dari ſupponerentur per x, & y, quocumq; modo immaginari hoc liceat (dummodò non dependeat à differentiis ſecundis ipſarum coordinatarum, aut ab altiorum graduum differentiis) ad æquationem ſemper perveniatur pro curva quæſita, in qua primæ tantum differentiæ reperiantur licet ſignis integralibus implicitæ ſint. Dixi mox quantitatem p, ſivè arcum habentem pro radio a, & pro ſinu y eſſe integrale ex $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$. Res ſatis manifeſta eſt. Si enìm ſinus eſt y, ſinus complementi erit $\sqrt{aa-yy}$; Iungantur ſimùl quadrata differentialium ſinus, & ſinus complementi, fietque quadratum differentialis arcus $\frac{aady^2}{aa-yy}$ unde differentiale arcus $= \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, & arcus ipſe $= \int\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$

Pro-

Propoſitio II.

SI detur relatio lineæ BT ſubtangentis deſcribendæ curvæ AD cujus axis debeat eſſe linea quævis curva data AB, & ordinatæ perpendiculares ad axem, ſi detur inquam relatio lineę BT ad ſuas coordinatas, vel ad quantitates, quæ quomodocumque dentur per coordinatas, & conſtantes, invenire ęquationem differentialem primi gradus pro tali curva. *Fig. 2.*

13 Supponatur per quodvis deſcribendæ curvæ punctum D ordinata DB eique infinitè proxima db, quę cum priore in C conveniat puncto evolutę curvæ AB, voceturque $AB = x$, $BD = y$, BC radius circuli oſculantis axim in puncto B ſit $= q$. $dG = dy$, $Bb = dx$, producaturque Bb tangens axis donec cum tangente per D coeat in T, eſt manifeſtum fore DG quartam poſt CB, Bb :: CD, unde erit $= \frac{qdx + ydx}{q}$.

Undè propter ſimilia Triangula dGD, DBT erit $BT = \frac{qydx + yydx}{qdy}$. In data igitùr æquatione exprimente relationem coordinatarum ad BT, pro s, ſivè pro BT ſubſtituatur hic valor, orietur manifeſtè æquatio differentialis quæſitæ curvæ. Si ponatur curva cadere ad partes E, hoc eſt ad partes ad quas axis concavus eſt, ſubtangens BV facilè eruetur $\frac{qydx - yydx}{qdy}$, vel $\frac{yydx - yqdx}{qdy}$.

CO-

Digitized by Google

COROLL.

14 **H**Ic quoque ſi in æquatione data exprimente relationem ſubtangentis s ad coordinatas, vel ad quantitates, quæ dentur per coordinatas, & conſtantes adeſſet ds, æquatio reſultans, ſubſtituto pro ds ejus valore contineret ddy, vel ddx, undè non eſſet primi gradus. Et ſi hìc quoque daretur non quidem ſubtangentis, ſed interceptæ inter tangentem, & lineam quæ perpendiculariter ducitur ad EC per C, relatio ad coordinatas, vel ad quomodocumque datas per coordinatas & conſtantes, ſemper facile erit ad ęquationem pervenire, eſt enìm hæc intercepta CR $= \frac{qqdx + 2qydx + yydx}{qdy} = r$, qua ſubſtituta in data æquatione loco literæ r niſi adſit in æquatione dr, orietur quæſita æquatio. Idemque de aliis lineis dicendum eſt, quæ ex tangente dependent, qualis eſſet perpendicularis à puncto C ad tangentem, & innumeræ tales.

Exemplum.

15 **A**D dati circuli AB peripheriam tanquam axem curvam deſcribere, cujus ſubtangens BT, ſit ęqualis ordinatæ, ità ut ſit ubique $s = y$. Si pro s ponas $\frac{qydx + yydx}{qdy}$, & pro q ponas a con-

ſtan-

Digitized by Google

ſtantem ex natura, circuli fiet æquatio $adx + ydx = ady$. Si verò ad eundem axem deſcriptæ curvæ ſubtangens debeat eſſe ad y in conſtanti ratione a, ad b, ità ut $ay = bs$, erit æquatio $abdx + ybdx = aady$. Si eſſe debeat tangens $DT = t = a$, fiet ęquatio (invento valore ipſius t, qui propter triangulum rectangulũ DBT eſt $\sqrt{\frac{aayydx^2 + y^4dx^2 + 2ay^3dx^2 + aayydy^2}{aady^2}}$) pro curva quæſita $dx = dy\frac{\sqrt{a^4 - aayy}}{ay + yy}$, aut quod idem eſt, $dx = dy\sqrt{\frac{a^3 - aay}{ayy + y^3}}$.

Exemplum II.

16 SI, exiſtente axe AB curva quavis data, debeat curva ducenda AD abſcindere ſubtangentes BT æquales radiis oſculantis circuli in correſpondẽtibus punctis axis, hoc eſt ſi debeat eſſe $s = q$, æquatio erit $dx = \frac{qqdy}{yq + yy}$. Si ſubtangens debeat efficere $x + y$, ſivè data ęquatio ſit $s = x + y$, erit quæſita $qydx + yydx = qydy + qxdy$. Si ſubtangens s debeat eſſe ad ſubtangentem $\frac{ydx}{dy}$ (quam haberet curva quæſita, ſi axis ejus in rectam diſtenderetur) in ratione conſtante a ad b, eſſet æquatio $aqydx = bqydx + byydx$, quo caſu (ut in aliis multis qui

occurrere poſſunt) differentialis æquatio ſtatim reducibilis eſt ad algebraicam, provenit enim, diviſo utrobique per ydx, aq = bq + by, & $y = \frac{aq - bq}{b}$;

debet igitùr radius oſculi CB produci in D ità ut BD ſit ad BC, ut a—b ad b ut ſic inveniatur punctum D in curva AD conſtitutum, cujus ſubtangens BT, ſit ad ſubtangentem quam haberet ſi ejus axis AB in rectam abiret (in variata abſciſſarum quantitate) ut a, ad b.

Propoſitio III.

Fig. 1. SI dari ſupponatur relatio ſpatii ABD curva quęſita ejuſque coordinatis comprehenſi, vel curvę AD, vel ſolidi orti ex rotatione curvæ ipſius quæſitæ circa axium alterutrum, datamve quomodocumque poſitione rectam, aut ſuperficiei, quæ ex tali revolutione ſit oritura ad ſpatia quævis, vel lineas, quæ per coordinatas, & conſtantes quomodocumque dentur, invenire æquationem differentialem primi gradus curvæ quæſitæ.

17 Ordinatæ BD, ducatur infinitè proxima bd, & DF, infinitè proxima df; erit ſpatiolum DBbd elementum ſpatii ABD = ydx, undè vocando p ſpatium ABD erit dp = ydx. Similitèr ſpatium infinitè parvum FDdf, quod eſt elementum ſpatii ADF, eſt = xdy, quarè, vocando q ſpatiũ ADF, erit dq = xdy.

Li-

Lineola verò Dd $\sqrt{dx^2+dy^2}$ erit elementum curvæ AD, quam proindè vocando r, erit dr $=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Si autem ratio radii ad ſui circuli integram circumferentiam vocetur ut a ad b, concipiatur autèm figura ABD in gyrum ferri circà immotum axem AB, & ſic una quævis ordinata BD circulum cujus illa ſit radius deſcribere, erit hujus circuli tota circumferentia $=\frac{by}{a}$, quæ ducta in radium dat duplum areę circularis, undè hæc area futura eſt $\frac{byy}{2a}$, ducta autem hac area in altitudinem infinitè exiguam Bb, fit $\frac{byydx}{2a}$ elementum ſolidi ex rotatione figuræ ADB circà axem AB geniti, quod ſolidum vocando s, erit $ds=\frac{byydx}{2a}$. Nec abſimilitèr reperiemus, quod vocando t ſolidum, quod fit ex gyro figuræ AFD circà axem AF, erit futurum ejus differentiale $dt=\frac{bxxdy}{2a}$. Superficies porrò orta ex rotatione AD circà AB habet pro elemento productum ex lineola Dd per totam circuli radium DB habentis peripheriam circulariter ducta, hoc eſt $\frac{by\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$, quarè $du=\frac{by\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$ ſi u ſit hæc ſuperficies, & eodem prorsùs modo $dv=\frac{bx\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$ ſi v concipiatur

eſſe ſuperficies orta ex rotatione AD circa AF. Ad inveniendam igitùr æquationem differentialem curvæ cum datur relatio quantitatum p, q, r, &c. ad coordinatas, vel ad quantitates, quæ dantur per coordinatas, differentietur æquatio data exprimens hanc relationem, & loco differentialium dp, dq, dr, &c. ponantur mox inventi valores, eritque æquatio differentialis primi gradus pro curva quæſita.

COROLL.

18 ÆQuationem igitùr datam, ne ingrediantur quantitates per dx, vel dy compoſitæ, quales ſunt ſubtangens, ſubnormalis, & reliquę quarum determinatio à tangentis determinatione pendet, quaſque prima propoſitione conſideravimus, tunc enim in differentiatione, quæ debet haberi, aderunt ddy, ddx, efficientia æquationem pro curva quæſita, non primi gradus, ſed altioris. Sed & alios caſus dari contingit, quibus æquatio per regulam traditam reperta, primum gradum excedat, ut ſi æquationem datam ingrediantur quantitatum p, q, &c. altiores poteſtates pp, p^3, aut etiam earum productum ppq, pr, &c. poſt quarum quantitatum differentiationem quantitates ipſas p, q, tranſcendentes, adhùc in æquatione remanere neceſſe eſt, undè ad tollendas illas, nova ſit opus differentiatione. Si quantitates datæ per ddx, vel ddy æquationem datam

tam

tam ingrediantur, aut quantitates per altioris generis differentialia expreſſæ, idem ſuccedet, & in pluribus alijs caſibus, quos ſingillàtìm diſtinguere longum eſſet.

Exemplum.

19 Solidum quod fit, ex figura quæſita AD circà axem AB rotata, debet eſſe ęquale ei quod circà axem coniugatum AF rotata paritèr producit, ſcilicet t = s, & dt = ds, ſivè $\frac{yybdx}{2a} = \frac{xxbdy}{2a}$; ergò differentialis ęquatio quam quęrimus erit xxdy = yydx. Si autem ſolidum ex rotatione figuræ circà axem AB debeat eſſe æquale ſolido, quod habeat pro altitudine conſtantem a, & pro baſi planum æquale complemento figuræ quæſitæ, ſivè æquale ſpatio AFD, hoc eſt æquatio data ſit s = aq, & ds = adq, ſubſtitutis pro ds, & dq eorum valoribus orietur $\frac{yybdx}{2a} = axdy$, & yybdx = 2aaxdy. Si ſpatium ABD debeat eſſe ubique æquale rectangulo conſtantis in curvam AD, vel p = ar, erit dp = adr, undè $ydx = a\sqrt{dx^2+dy^2}$, & indè $dx = \frac{ady}{\sqrt{yy-aa}}$. Si ſolidum aar conſtantis quadrati in curvam debeat æquare ſolidum s, ſivè aadr = ds erit $\frac{yybdx}{2a} = aa\sqrt{dx^2+dy^2}$,

eris

erit poſtquam quadrando ſurdas quantitates reduxerimus, & alia de more peregerimus $dx = \frac{2a^3dy}{\sqrt{y^4bb - 4a^6}}$.

Exemplum II.

20 SI ſumma cuborum coordinatarum æquare debeat ſolidum ex revolutione ABD circà AB, erit $s = x^3 + y^3$, & ds, ſivè $\frac{yybdx}{2a} = 3xxdx + 3yydy$, vel $yybdx = 6axxdx + 6yyady$. Quod ſi ſolidum illud s debeat eſſe ad cylindrum baſis circularis DB altitudinis verò AB ut x, ad y, erit $s, \frac{byyx}{2a} :: x, y$, undè facta æquatione $\frac{byxx}{2a} = s$, & $\frac{bxxdy + 2byxdx}{2a} = ds = \frac{byydx}{2a}$, & habetur æquatio quæſita $xxdy + 2yxdx = yydx$. Si ſuperficies ſolidi s, quæ eſt u ad ſummam quadratorum ex coordinatis, conſtantem rationem ſervare jubeatur quam a ad c, erit data æquatio $cu = axx + ayy$, undè $cdu = 2axdx + 2aydy$ ſeù $cby\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2aaxdx + 2aaydy$, & quadrando $ccbbyydx^2 + ccbbyydy^2 = 4a^4xxdx^2 + 4a^4yydy^2 + 8a^4xydydx$.

COROLL.

21 EX methodo quâ utimur ad eruendas has æquationes differentiales cum datur relatio ſpa-

ſpatii curva quęſita comprehenſi ad coordinatas, facile eſt invenire æquationem differentialem primi gradus etiàm in curvis quarum axis ſit data quævis curva, quando detur æquatio, quæ ſpatii magnitudinem, aut curvæ ipſius longitudinem ad coordinatas, vel quantitates, quæ per coordinatas dentur utcumq; referat, dummodò (quod pro lineis ad axes rectos relatis adnotavimus) nō appareant, aut ſpatiorū, (nu.18.) aut curvæ ipſius altiores dimenſiones, in ęquatione data, & non adſint alię quātitates, quę per dx, & dy dentur, qualis eſſet ſubtangens, & aliæ à tangentis determinatione pendentes. Si exempli cauſa velis Fig. 2. curvam AD ſuas correſpondentes in axe ordinatas AB + BD ex æquare; inventa $DG = \frac{qdx + ydx}{q}$ ſi (nu.13.) ejus quadrato addas dy^2 erit Dd elementū curvę AD $= \sqrt{\frac{qqdx^2 + yydx^2 + 2qydx^2 + qqdy^2}{q}} = dy + dx$ ex hypoteſi. Quæ æquatio reducetur ad $dx = \frac{2aady}{yy + 2ay}$, ſi curva AB, quæ axis eſt, jubeatur eſſe circulus radio a deſcriptus. Si elementum ſpatii ABD quæſiveris, erit (ſubducto $CBb = \frac{qdx}{2}$ ex CDG quod eſt $= \frac{qqdx + yydx + 2qydx}{2q}$) reliquum trapeziolum DdbB elementum quæſitum $= \frac{yydx + 2qydx}{2q}$, un-

dè

dè & æquationes eruere in promptu erit cum dabitur proprietas ſpatii quod quæſita curva ad axem curvatum poſita debeat continere.

Propoſitio IV.

Fig. 3. DEſcriptis infinitis Curvis algebraicis ſimilibus, & circà datum axem AT, punctumque in illo A, ſimiliter poſitis, axemque in uno, pluribuſve punctis L ſecantibus, aſſumptoque in earum unaquaque LE, LG arcu LE, LG eidem datę conſtanti a ubique æquali; quęritur curvæ ſic deſcriptæ BEG æquatio differentialis primi gradus.

22 Quamvis æquationes, differentiales curvarum in gratiam tantùm conſtructionis eruendæ hic conſideremus, quem ſanè in uſum inutile videri poſſet hic curvę BEG æquat. differẽtialem quęrere, cujus cõſtructio, ex hypoteſi, aſſumptis arcubus LE, LG datę a æqualibus expeditur, invenienda nihilominùs eſt hæc æquatio, quæ viam ſternit, qua in huiuſmodi innumeris caſibus ad æquationes inveniendas gradiamur, ſimulque Theorematum, haud contemnendorùm, fons eſt, & origo.

23 Nomine curvarum ſimilium intelligimus curvas ejuſdem naturę, in quibus Parametri, ſivè conſtantes ſunt in eadem ratione. Hinc ſi curvarum æquatio unam tantùm conſtantem ſiuè parametrum contineat, ut parabola ad axem, & verticem axis relata

lata erunt omnes parabolæ ad unum axem, & axis verticem relatæ invicèm ſimiles. Sed ſi curvarum æquatio duas, vel plures conſtantes includat, ut ellipſis, erunt ſimiles illæ in quibus ſingulæ parametri unius, ad ſingulas parametros homologas alterius eandem ſervabunt rationem.

24 Aſſumpto igitùr quovis puncto E in data curva BEG, eique infinitè proximo G, ducantur per E, & G curvæ genitrices EL, GL, perque punctum A jungatur AE curvæ LG occurrens in F, & per E ducatur EC tangens curvam genitricem EL in E, jungaturque AI parallela ipſi EC, producaturque EG faciecula curvæ BEG donec in T ſecet axem AB, tangatque ſic datam curvam in E, & ſecet AI productam, ſi fuerit opus, in H. Data hac tangente, non poterit latere æquatio differentialis curvæ propoſitæ, ut mòx patebit. Ponamus curvas EL, GL, omneſq; reliquas illis ſimiles, ad axem AB, punctumq; in illo A referri, per ordinatas angulum quemvis cum axe facientes. Eſto igitur per E ordinata EO, aſſumanturque $AO = x$, $OE = y$ ordinatę curvę datæ EG; Subtangens itaque OC curvæ LE in puncto E vocetur s, & tangens EC vocetur t; parameter autèm quævis lineę EL vocetur $= z$, conſtans quidem reſpectu diverſorum in eadem curva EL punctorum, ſed variabilis reſpectu diverſarum curvarum EL, GL. Clarum eſt, ex natura curvarum ſimilium circà eundem axem, idemque in illo punctum ſimilitèr lo-

tarum fore ut parameter una lineæ EL ad homologam parametrum lineę GL, ità EL, FL, ſivè z, z + dz :: a, ad FL, quæ proindè erit $\frac{az + adz}{z}$, ex qua demendo GL = a, reliquum erit $\frac{adz}{z}$, = GF. AE verò ponatur = u, & quoniam iterùm z, z + dz :: AE, AF, erit AF = $\frac{uz + udz}{z}$, undè EF = $\frac{udz}{z}$. Sed triangula EFG, EAH ſunt ſimilia, eo quod FG tangens curvæ LF in puncto F (quod puncto E ſimilitèr poſitum eſt propter rectam AEF) ſit parallela tangenti EC, & lineæ HA, igitùr HA = a, quod conſtructionem elegantiſſimam ſuppeditat, qua in curva BEG per datum punctum E quodvis tangens ducatur, ducta AH per A parallela tangenti quæ per E ad genitricem curvam EL inclinatur, & aſſumpta AH = conſtanti datæ a, ſic enìm juncta EH tangens erit. Triangula porrò ECT, HAT ſunt ſimilia, ergò EC, AH :: CT, AT, & dividendo EC − AH, AH :: AC, AT, ſivè t − a, a :: s − x, AT = $\frac{sa - ax}{t - a}$, undè dempta OA = x, reliquum OT = $\frac{sa - xt}{t - a}$ ſubtangens curvæ propoſitæ BEG, quæ cum ex canone univerſali ſit = $\frac{ydx}{dy}$, erit sady − xtdy = tydx − aydx, in qua æquatione ſigna poſ-

ſunt

ſunt eſſe varia, pro varia puncti O poſitione reſpe-ctu puncti A. Poſito deindè abſciſſam quamvis curvę LE eſſe PA = q, & ejus ordinatam PQ in angulo QPA ipſi EOA æquali eſſe = r, invenietur valor ſubtangentis, & tangentis pro quovis puncto Q curvæ expreſſus per q, r, & conſtantem unam, vel plures inter quas adeſſe poterit conſtans z (conſtantes intelligo reſpectu diverſorum in eadem curva qualis eſt LE pnnctorum) in quo valore ſi pro q, & r ponas x, & y, invenietur valor ſubtangentis, & valor tangentis pertinentium ſpecialitèr ad punctum E, ſivè valor linearum OC, EC quos ſubſtituemus pro s, & t in æquatione sady − xtdy = tydx − aydx, & fiet æquatio quam ingredientur tantùm x, y, a, & z cum alijs parametris, ſi adſint, conſtantibus quidèm pro una quavis linearum EL, GL, ſed variabilibus pro diverſis punctis curvæ BEG. Iàm verò cum omnes curvæ EL, FL ſimiles eſſe ponantur, erunt parametri homologæ illarum in conſtanti ratione in omni curva, hoc eſt ſic erit parameter z in curva EL, ad parametrum aliam quamvis curvæ ejuſdem, quam dicemus b, ut parameter homologa parametro z in curva GL, ad parametrum homologam parametro b in curva eàdem, & ſic in reliquis, ità ut poſito rationem z ad b eſſe ut m, ad n, poſſimus pro b ſcribere $\frac{nz}{m}$, & n, & m futuræ ſint conſtantes non ſolum pro una quavis cur-

varum EL ſeorsìm ſumpta, ſed & pro omnibus ad invicèm relatis, quæ ob ſimilitudinem, quam ſervant, conſtantem ſuarum parametrorum relationem habere ſupponuntur. Non abſimilitèr, ſi adfuerit tertia conſtans, ſivè parameter c, pro illa ponemus $\frac{fz}{g}$, eruntque f, g conſtantiſſimę, ſivè in omni curva EL, GL eędem. Poſtquam igitùr in æquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ ſubſtituerimus pro s, & t earum valores, ſubſtituamus ulteriùs pro b, c &c. earum valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. & æquatio reſultans explicabitur tantùm per literas y, x, dx, dy, z, & conſtantes a, n, m, f, g &c. Tandèm & ipſa z tolli poterit ex æquatione, ſi in ęquatione pro curvis EL ſubſtituamus priùs pro b, c, &c. valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. tunc enìm (ſi algebraica ſit æquatio ut ſupponitur) habebitur valor ipſius z in literas q, r, m, n, f, g, & alias conſtantes, abſque eo quod aut dq, aut dr appareant, undè pro q, & r poterimus ponere x, & y, ſicque valorem ipſius z habebimus in x, y, m, n, &c, qui ſubſtitutus in ęquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ reſtituet demùm æquationem differentialem pro curva propoſita BEG ſolis x, y, dx, dy a, m, n, &c. conſtitutam.

CO-

Digitized by Google

COROLL.

25 Vides hanc conditionem, quam addidimus, quod curvæ ordinatìm datæ EL, GL ſint algebraicę, ideò apponi, ut per hanc methodum ęquatio differentialis reperiatur pro curva BE, per ſolas coordinatas, earumque differentialia, & conſtantes expreſſa. Verùm quo ad methodum ducendi tangentes ad curvam BEG attinet, aſſumpta juxtà regulam AH = a, & quo ad valores differentialium EG, FE, hi quidem nullo pacto hac conditione anguſtantur, ſed etiàm ſi curvæ datæ tranſcendentes eſſent æquè benè procedunt, & pro legitimis habendi ſunt, cum in eorum inventione nulla ęquationis linearum LE, LG ratio habeatur.

COROLL. II.

26 Sivè igitùr curvæ LE, LG ad cōmunem axem, punctumque commune A, circà quod ſimiliter poſitæ ſunt, per rectas EO angulum EOA continentes cum axe ęquatione algebraicâ, ſivè tranſcendente referantur, ſempèr, ducta per quodvis punctum E in quavis ex infinitis curvis ad libitum aſſumpta LE, tangente EC, ductaque infinitè proxima ad aſſumptam LE, quę ſit FL, junctaque AE ſecante FL in F, & ducta AI parallela ad EC, ſivè ad FG, ſimilia reperientur triangula ECO, IAO undè

Digitized by Google

dè CO, OE :: AO, OI, ſivè s, y :: x, $\frac{xy}{s}$ = OI, & reliquum IE = $\frac{ys - xy}{s}$ aſſumimus enìm nùnc pro x, & y non ordinatas ad curvam BEG, ſed ad quamvis ex infinitis curvis EL, & pro s, & t, correſpondentes ſubtangentem, & tangentem in eadem curva. Triangula iterùm EAI, EFK ſunt ſimilia, producta OE in K uſquè ad curvam LF, igitùr EA, EI :: EF, EK, & cum AE, EF ſint reſpectivè u, & $\frac{udz}{z}$ erit EK = $\frac{ysdz - xydz}{sz}$. Eſt autèm EK differentiale ordinatæ OE pertinentis ad lineam EL, poſito abſciſſam AO invariatam remanere, & variari tantùm parametros lineę EL, ità tamèn ut eandem ſemper ad invicem ſervent proportionem. Linea enìm OK eſt ordinata ad curvam FL curvæ EL infinitè proximam eique ſimilem, & circà axem LA punctumque A ſimiliter poſitam, & pertinens ad abſciſſam AO, ad quam etiàm pertinet ordinata OE in curva LE, quod idem eſt ac dicere, ordinatam OE, fierî OK, ſi ſupponantur variabiles parametri lineę EL eundem tamèn ad invicèm reſpectum cuſtodientes (quo ipſo curva EL in ſibi ſimilem infinitè proximam FL tranſit) & abſciſſa OA conſtans ſupponatur; EK igitùr eſt id per quod creſcit OE, quando ex ordinata lineæ EL, pertinente ad abſciſ-

ſam

ſam OA, ſit ordinata curvæ FL priori ſimilis ſimiliterque poſitę circà axem AL, punctumque A, ſit inquam talis ordinata pertinens ad abſciſſam eandem OE; uno verbo tandèm EK eſt differentia duarum applicatarum ad eandem abſciſſam ſpectantium, ſed ad diverſas curvas infinitè proximas, & ſępè memoratis legibus deſcriptas, ordinatarum. Ad inveniendum igitur EK, dfferentiale cujuſvis ordinatę OE in quavis linea EL algebraica, vel tranſcendente angulum quemvis cum axe facientis, poſito parametros curvę illius, ſivè quantitates conſtantes, quæ valorem ipſius OE quomodocumque componunt, variari ſemper eandem ad invicem proportionem ſervantes, & ſimùl abſciſſam AO ſtare invariatam, utemur ſuprà invento canone $EK = \frac{ysdz - xvdz}{sz}$, ubi y eſt ipſa OE differentianda, s eſt ſubtangens curvæ datæ in axe AO, ad quod refertur data curva LE, ad punctum E pertinens, quantitas, autem x, abſciſſam denotat AO, quam ut conſtantem in differentiatione ponimus, z verò eſt parametrorum una ad libitum ſelecta, nihil enìm intereſt quam potiùs aſſumamus. Rem exemplis illuſtrare non inutile forſan, ſed certè nimis longum foret. Aſſumat unuſquiſque ſibi quantitates unius dimenſionis algebraicas ad differentiandum poſita x conſtante, & a, b, c, &c. variabilibus modò variatæ eandem relationem ad invicem retineant, diffe-

ren-

Digitized by Google

r:ntietque methodo Hoſpitaliana, invenietq; idem differentiale, quod etiàm reperiet hac uſus methodo, quam inſupèr ad tranſcendentes quantitates, ſivè ſigno integrali ſuppoſitas extendere poteſt. Unicum exemplum eſto pro algebraicis lineis, ſi datæ curvæ EL, FL, &c. eſſent totidem circuli, quorum centra in communi axe AO, talitèr locata eſſent, ut diſtantiæ ſingulę AL, AL, &c. eſſent quartæ partes diametrorum, hoc eſt, AL quarta pars diametri circuli LE, AL verò quarta pars diametri circuli LF, &c. ordinatæ autèm EO, brevitatis gratia, ad axem AO perpendiculares aſſumantur. In hoc caſu, curvæ omnes EL, FL ſibi ſimiles erunt, & circà communem axem, & punctum A ſimiliter locabuntur, æquatio autèm, poſito horum circulorum radio $= 2z$, abſciſſa OA x, ordinata OE $= y$ erit $y = \sqrt{3zz - xx + 2zx}$. Subtangens OC $= s$ per conſuetam regulam eſt $= \frac{3zz - xx + 2zx}{z-x}$, undè $s - x = \frac{3zz + zx}{z-x}$. quarè EK $= \frac{\overline{s-x} :}{sz}\, ydz$ erit $= \frac{3zdz + xdz}{\sqrt{3zz + 2zx - xx}}$ prorsùs ut prodit differentiando juxtà conſuetas regulas $\sqrt{3zz - xx + 2zx}$ poſita z variabili, & x conſtāte. Si curvæ LE, LK cōmune punctum habeant L, & ordinatis exiſtentibus ad axem AO perpendicularibus, poſitis AO $= x$, OE $= y$ ſit $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, & debeat y differentiari poſita x conſtante, & a variabili, in-

ve-

Digitized by Google

veniatur curvæ AE (cujus æquatio eſt $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, vel $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$) ſubtangens OC, eritque OC $= s = \frac{y\sqrt{2ax-xx}}{a}$, & pro indè $\frac{\overline{s-x}\, yda}{sa}$ (quoniàm hic z interpretamur per a) ſivè quæſitum differentiale erit $\frac{yda\sqrt{2ax-xx} - axda}{a\sqrt{2ax-xx}}$

27 Obſervare non prætereamus, quod unitas interdùm locum alterius parametri teneat, ità ut differentianda quantitas plures conſtantes aliquandò includat, licèt una tantum ſit manifeſta ut ſi inveniendum ſit differentiale quantitatis tranſcendentis $\int \frac{x^3dx + adx}{aax - a^3}$ poſita a variabili, & x conſtante, debet membrum adx intelligi bis ductum in unitatem, quam ſi vocemus b, erit quantitas differentianda $\int \frac{x^3dx + abbdx}{aax - a^3} = y$ duabus parametris compoſita quæ proindè conſtantem ad invicem rationem ſervare debent, ut tradita regula utamur ad ejus differentiale reperiendum. Ponamus a, & b in conſtanti proportione perſeverare debere, erit $s = \frac{aaxy - a^3y}{x^3 + abb}$ undè $\frac{\overline{s-x}\, yda}{sa}$ differentiale, quod quærebamus erit $= \frac{aaxyda - a^3yda - abbxda - x^4da}{a^3x - a^4}$.

28 Aliud notare convenit, ut regula pro ordinatis differentiandis ad quantitates cujuſvis dimenſionis poſſit expandi. Satìs enìm clarum reor, mox traditam regulam, pro ut tradita eſt, lineis tantùm, ſivè ordinatis curvarum inſervire poſſe, ut earum differentialia eruantur. Si igitùr differentianda proponatur qnantitas duarum pluriumve dimenſionum, in qua x ut conſtans, parametri autèm ut variabiles cenſendę forent, conſtantem ad invicèm reſpectum habentes, debet illa in quantitatem unius dimenſionis permutari, ſed hæc ipſa tranſmutatio negotium faceſſere poſſet ei, qui non conſideraverit, qua via hoc legitimè, & ad intentum utilitèr fieri poſſit. Exempli loco aſſumamus eſſe propoſitam quantitatem $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ ad differentiandum poſita x conſtante, a verò variabili; debet illa ad unicam dimenſionem reduci, ſi aſſignata differentiandi methodo quis uti velit. Si quis ſcribat igitùr $\frac{2aax - x^3}{aa + ax}$, & hujus differentiale inveniat per exhibitam methodum, erit illud $= \frac{2aaxxda + 2ax^3da + x^4da}{a^4 + 2aaxx + 2a^3x}$. Sed hoc invento non poterit facilè ad quęſitum differentiale quantitatis $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ regredi, cum à differentiali quantitatis $\frac{2aax - x^3}{aa + ax}$, ad differentiale

quan-

quantitatis $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ non valeat regreſſus per ſimplicem multiplicationem illius per a inſtitutam, quia hìc a non ut conſtans, ſed ut variabilis aſſumitur. Debet igitùr quantitas propoſita $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ reduci ad ſimplicem lineam per totidem dimenſiones ipſius x, quot fuerit neceſſarium, & deindè quantitatis ſic reductę differentiale inveniendum eſt per ſuperiorem regulam, inventum enìm, ſi multiplicetur, aut dividatur per dimenſiones ipſius x per quas dividenda, aut multiplicanda fuit data quantitas ut unius fieret dimenſionis, invenietur tutò differentiale propoſitę quantitatis. Sìc ad inveniendum differentiale quantitatis ſuperioris $\frac{2aax - x^3}{a + x}$, quæ duarum dimenſionam eſt, poſita x conſtante, ſcribo priùs $\frac{2aax - x^3}{ax + xx} = y$, hujuſque differentiale invenio, pro quo eſt $s = \frac{\overline{ax + xx} : \overline{2aax - x^3}}{-2x^3a - x^4 - 2aaxx}$, & $\frac{\overline{s - x}\, yda}{sa} = \frac{2aaxxda + x^4da + 4ax^3da}{2aaxx + x^4 + 2ax^3}$ differentiale ex $\frac{2aax - x^3}{ax + xx}$ poſita a variabili, & x conſtante, quo invento ſi illud ducatur in x, fiet differentiale ex $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ (eo quod x conſtans eſſe ponitur)

 2aa-

$= \frac{2aaxda + x^3 da + 4axxda}{aa + xx + 2ax}$ prorsùs ut prodit differentiando eandem quantitatem Hoſpitaliana methodo,& literam a, non x ut variabilem uſurpando. Quod ſi quantitas differentianda fuiſſet tranſcendens plurium dimenſionum, ut $\int dx\sqrt{aa-xx}$, reduxiſſemus illã ad unicam ſcribendo $\frac{\int dx\sqrt{aa-xx}}{x}$ $= y$ ſivè $\int dx\sqrt{aa-xx} = xy$, cujus curvę valor ſubſtangentis s eſt $\frac{xy}{\sqrt{aa-xx}-y}$, undè valor differentialis $\frac{\overline{s-x}:yda}{sa} = \frac{2yda - da\sqrt{aa-xx}}{a}$, quod proptereà ductum in x dabit quæſitum differentiale quantitatis $\int dx\sqrt{aa-xx} = \frac{2yxda - xda\sqrt{aa-xx}}{a}$,

29 Addo, quod hęc regula differentiandi ordinatas curvarum cum in curvas ſimiles tranſeunt facillimè fluit ex conoidis cujuſdam ſectione, cujus baſis ſit una curvarum ſimilium, vertex verò conoidis in ſublimi, ità ut quę à vertice conoidis, ad figurę ipſius, quę pro baſi eſt verticem ducitur recta linea, baſis ipſius parametro ęqualis exiſtat. Si nem-

nempè tale ſolidum ſecetur plano lateri coni parallelo, ordinatę ſectionis erunt etiàm ordinatę ad diverſas curvas baſi ſimiles, communemque abſciſſam in illis habebunt, diſtantiam ſcilicèt ſectionis à latere coni, cui parallela eſt. Ducta igitùr talem ſectionem tangente, quę facilè ducitur, ex illa in promptu eſt eruere differentialia ordinatarum talis ſectionis, & invenientur convenire cum ijs, quę mox tradidimus; nobis tamèn, quibus hęc incidentèr tantùm occurrunt indicaſſe ſufficiat.

COROLL. III.

30 CONſiderando portiones curvarum, quæ intercipiuntur axe LO, & ordinata quavis OK, ſivè curvarum ſegmenta EL, KL, & reliqua, oritur alia non inutilis meditatio. Claritatis gratia fiant ſequentes denominationes, & hypoteſes. Data ponatur in angulo quovis ad axem AO (circà quem, & circa punctum A in illo poſitum ſimilitèr conſtituta eſt ſeries ſimilium curvarum EL, KL &c.) quęvis recta OK, auferens à curvarum ſerie portiones EL, KL &c. quarum minima ſit invenienda, ſivè inter infinitas de ſerie LE, KL illa ſeligenda ſit curva, cujus arcus inter axem LO, & datam rectam EO ſit omnium minimus. Aſſumatur una ex curvis ad libitum LE, eique infinitè proxima LK, ſitque AO data $= a$, AE $= u$, curva EL $= x$, ejuſque para-

rameter, aut parametrorum una ad libitum $= z$, ponaturque curvę EL ęqualis portio GL, ductiſque tangentibus EC, FG invicèm parallelis, conſiderentur triangula ECO, IAO; eſt enìm $OC = s$, $CE = t$ :: $AO = a$, $IA = \frac{at}{s}$; deindè propter ſimilia EIA, EKF erit $EA = u$, $IA = \frac{at}{s}$ :: $EF = \frac{udz}{z}$ ad $FK = \frac{tadz}{sz}$; eſt autèm $FG = \frac{xdz}{z}$, undè $FG - FK = KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$. Sed KG eſt differentiale arcus EL, quatenùs rectis LO, OE intercipitur, cum ſit id per quod arcus infinitè proximus KL ſuperat antecedentem EL, ſivè GL, ergò differentiale arcus intercepti inter duas lineas AO, OE (arcus inquam ſecundum notas regulas deſcripti) eſt qualem mòx repertum habemus $KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$, quod ſi æquetur nihilo, proditura eſt æquatio $x = \frac{ta}{s}$ indicans arcum illum eſſe minimum ex infinitis FL, KL &c. qui fuerit quartus poſt ſuam ſubtangentem, tangentem, & lineam AO. Iàm igitùr arcum nùnc poſſumus ſic invenire. Per ſingula puncta L erigantur ad axem OL rectæ æquales correſpondentibus curvarum portionibus LE, LK &c. in angulo quovis exempli gratia recto, eruntque extremitates erecta-

ctarum in curva quadam; deindè per ſingula etiàm punctâ L erigantur in eodem angulo quo priùs, putà hìc recto, lineæ rectæ æquales quantitatibus $\frac{ta}{s}$, quæ ſci: ſint quartę proportionales poſt ſuas correſpondentes OC, CE, & datam AO, ſecabitque curva, quæ ſic fiet curvam priùs conſtructam, in puncto quodam, per quod ad axem perpendicularis, ſeù linea in angulo quem cum axe faciunt harum curvatum mòx deſcriptarum ordinatę ducenda erit, illam ſecans in L; Per hoc punctum L ponenda eſt curva ſimilis curvis EL, KL, & circà axem AO, punctumque A ſimilitèr poſita ac illę, eritque hæc illa quam quærimus, cujus arcus axe, & recta OE interceptus minimus erit ex omnibus arcubus curvarum illi ſimilium, ac circa eundem axem OL, punctumque A ſimilitèr poſitarum, rectis AO, & EO interceptis, quia ſiquidèm talis arcus manifeſtè erit æqualis quantitati correſpondenti $\frac{ta}{s}$. Alias conſtructiones aferri videre poſſumus pro hoc arcu minimo inveniendo, in idem tamen recidentes. Nos longiori parcimns digreſſioni, noſtramq; rem reaſſumere properamus.

Digitized by Google

Propoſitio V.

Deſcriptis infinitis curvis ſimilibus, LE, LF, & circà datum axem AB, punctumque in illo A ſimilitèr poſitis, axemque in uno, pluribuſve punctis L ſecantibus, & poſito brevitatis tantùm gratia, ordinatas quibus ad communem axem AB referuntur nempè ipſas EO, GB &c. eſſe ad axem perpendiculares, aſſumptoq; in earum curvarum unaquaque ſpatio LEO, LGB eidem conſtanti ſpatio aa æquali, quæritur curvæ EG æquatio differentialis primi gradus.

31 Sunto duæ in quæſita curva EG coordinatę AO, OE x, & y, quas ad axem normales eſſe brevitati conſulentes nùnc ſupponamus; eſto etiàm curvæ genitricis LE ſubtangens OC = s, & juncta recta AE (quæ producta curvam LF ipſi LE infinitè proximam ſecet in F) vocetur u; & per F ſit ordinata Fa; erit itaque propter curvas ſimiles ut quadratum unius parametri curvæ LE, ad quadratum correſpondentis parametri curvæ LF, ità ſpatium LEO ad ſpatium LFa, undè ſi vocetur parameter curvæ LE = z, & curvæ LF = z + dz erit $zz, zz+2zdz+dz^2$ :: aa ad quartum, undè ſpatium LFa $= \frac{zzaa+2zaadz+aadz^2}{zz}$, ex quo ſi demas ſpatium LGB, quod ex hypotheſi eſt = aa, erit ſpatiolum FaBG rectâgulum ex hypotheſi $= \frac{2zaadz+aadz^2}{zz}$,

ſivè, relicto ultimo membro quod eſt præcedente incomparabilitèr minus, erit ſpatiolum rectangulum Fa BG $= \frac{2aadz}{z}$, quod diviſum per BG $= y$ dat Ba $= \frac{2aadz}{zy}$. Eſt autèm etiàm par: curvę LE, ad par: curvę LF :: AO, Aa, ergò Aa $= \frac{zx + xdz}{z}$, ex qua dempta AO $= x$, remanet Oa $= \frac{xdz}{z}$ undè BO $= \frac{2aadz - xydz}{zy} = dx$, undè eruitur $\frac{dz}{z} = \frac{ydx}{2aa - xy}$; ducta porrò ipſi tangenti EC parallela AI, quæ OE ſecet in I, erit OI $= \frac{xy}{s}$, & IE $= \frac{ys - xy}{s}$; & quoniàm iterùm ut parameter curvæ LE, ad par: curvę LF :: AE, AF, erit AF $= \frac{uz + udz}{z}$, & dempta AE $= u$, erit EF $= \frac{udz}{z}$; ſed triangula EAI, EFK ſunt ſimilia, cum proptèr curvas ſimiles FK, ſivè tangens in F ſit ipſi EC, ſivè IA parallela, ergò EA, EI :: EF, EK, & erit EK $= \frac{ysdz - yxdz}{sz}$, & ducta per G ipſi BO parallela, & æquali Gi, cum KG ſit ipſi FK indirectum erit CO, OE :: IG, iK ergò iK $= \frac{ydx}{s}$, qua dempta ex EK, reliqua iE ſivè Gm erit

G $=$ysdz

$= \frac{ysdz - yxdz - yzdx}{sz} = dy$, in qua æquatione, ſi ponas pro $\frac{dz}{z}$ valorem ſuprà inventum $\frac{ydx}{2aa - xy}$, prodibit æquatio ſolis x, y, dx, & dy, & s conſtans, & ſi pro s ponatur valor ejus ex data natura curvarum LE, LF notus, prodibit æquatio differentialis curvæ quæſitæ GE, modò pro z, ſeù pro valore conſtantis reſpectivè ad curvam LE ponatur ejus valor ex æquatione ejuſdem curvæ deductus.

32 Undè & illud facili negotio derivatur, quod ſubtangens BT curvę EG ſit $= \frac{2aas - sxy}{sy - 2aa}$. Quarè ad ducendam in tali curva tangentem opus eſt tantum rectæ AC aliam AT in directum applicare, ità ut CT ad AT ſit ut triangulum CEO, ad ſpatium LEO.

Propoſitio VI.

PONamus nùnc curvas non ampliùs eſſe ſimiles, ſed tantùm ordinatæ OE, OK (quas brevitatis gratia ad axem normales eſſe fingamus) ſint conſtantèr proportionales, & curva EG abſcindat ſpatia LEO, LGB eidem aa æqualia, quæritur hujus curvæ differentialis æquatio primi gradus, hoc eſt data quavis curva, & datis alijs infinitis, quarum ordinatæ ſint ad ordinatas datæ curvæ eaſdem abſciſſas ha-

habentes in data ratione conſtante pro ſingulis curvis, variabili verò pro omnibus, invenienda eſt æquatio differentialis primi gradus curvæ EG abſcindentis ſpatia LEO, LGB eidem aa, & invicèm æqualia.

33 Omnes tales curvæ habebunt in axe AB commune punctum initij, quod coincidet cum A, undè aſſumimus abſciſſas. Aſſumpta curvarum una LE, atque illi infinitè proxima LF, & ducta ordinata OEK, quam axi AB perpendicularem finge, ſecante curvas in E, & K, ductaque per E curvam LE tangente EC, tangens curvam LF per K ducta, ſivè lineola KG, producta ad idem punctum C coincidet, quod eſt facile demonſtratu. Ponatur ordinatam Bu ad BG, ſimilitèr OE ad OK eſſe ut z ad z+dz, quæ quidem ratio, quo ad diverſa curvarum infinitè proximarum LE, LG puncta erit conſtans; vocentur AO, OE coordinatæ ad curvam EG x, & y, OC verò ſubtangens puncti E in curva LE ſivè puncti K, vel F in curva KL ſit $= s$, ſpatium porrò conſtans LEO, LGB $= aa$. Iàm verò quoniàm ponimus ordinatas ſingulas OE creſcere in eadem ratione z ad z + dz, erit ſpatium LEO ad LKO in eadem ratione z ad z+dz, itaq; $LKO = \frac{zaa + aadz}{z}$, ex quo ſi dematur $LGB = aa$ reliquum erit ſpatiolum $GEOK = \frac{aadz}{z}$, quod ſi brevitatis cauſa pona-

mus eſſe rectangulum, opus erit tantùm illud dividere per GB $= y$ ad habendam OB $= dx = \frac{aadz}{zy}$, undè $\frac{dz}{z} = \frac{ydx}{aa}$. Tota verò KO cum ſit $= \frac{yz+ydz}{z}$, erit EK $= \frac{ydz}{z}$, & ſi fiat CO, OK :: GI, IK, ſivè in terminis algebr. s, $\frac{yz+ydz}{z}$ :: dx, ad $\frac{yzdx+ydxdz}{zs}$ erit hæc = iK, ſivè iK $= \frac{yzdx}{zs} = \frac{ydx}{s}$, & ex EK $= \frac{ydz}{z}$ ſi demas iK $= \frac{ydx}{s}$, reliqua iE, vel Gm $= \frac{ysdz - yzdx}{sz} = dy$, quarè ſi prò $\frac{dz}{z}$ ponas valorem $\frac{ydx}{aa}$ prodibit æquatio $yysdx - aaydx = aasdy$.

Quoniàm verò dari ponimus æquationem curvę, ad quam reliquæ omnes referuntur, habentes ſuas ordinatas ad illas curvæ datæ eaſdem abſciſſas x habentes ut a ad b, hinc ſi valor y erutus ex data æquatione multiplicetur per a, & dividatur per b, fiet valor ordinatæ pro quavis curva de ſerie data ad abſciſſam x pertinentis, & (poſita a conſtante) erit b conſtans quidèm pro quavis curva, ſed variabilis pro diverſis curvis de data ſerie. Exempli loco ſi data curva eſſet circulus, ſeries curvarum eſſet totidem Ellipſium, axem tranſuerſum commu-
nem

nem, ſecundarium variabilem, & per b expreſſum habentium; ſi data curva eſſet hyperbola æquilatera, reliquę eſsent totidem hyperbolæ axem quidèm a tranſuerſum communem, ſecundarium porrò variabilem habentium; cum verò tangentes ad curvas LE, LK in punctis, E, K, & in reliquis aliarum talium curvarum punctis ductæ in eadem ordinata BEK poſitis omnes in C ſint conventuræ, ac proindè eandem ſubtangentem BC ſint habituræ, ſequitur, quod ſi tantùm inveniatur valor s pro curva propoſita (qui abſque litera b certò prodibit) & hic ſubſtituatur in æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ fiet ęquatio differentialis primi gradus ſolis x, y, conſtantibus, & dx, & dy conſtans pro curva EG.

Exemplo unico res patebit. Eſto data curva circulus $y = \sqrt{2ax - xx}$. Iàm æquatio pro omnibns curvis ſeriei LE, LF, &c. erit $y = \frac{a\sqrt{2ax - xx}}{b}$ ad infinitas ellipſes, & b eſt conſtans reſpectu duarum curvarum LE, LF, ſed variabilis reſpectu diverſarum. Iàm ſubtangens s curvę cujusvis erit $\frac{2ax - xx}{a - x}$, eadem ac in circulo, quæ ſi in locum s ſubſtituatur in æquatione pro curva EG, prodibit ęquatio quæſita differentialis primi gradus pro eadē curva $2axyydx - xxyydx - a^3ydx + aaxydx = 2a^3xdy - aaxxdy$.

34 Ex æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ erue-

tur.

tur $\frac{ydx}{dy} = BT = \frac{aas}{ys - aa}$ ſubtangens curvæ EG, quarè facilis conſtructio.

Propoſitio VII.

Fig. 4. DAta linea quavis MV, quę circà datum punctum fixum C in gyrum ferri concipiatur in plano CMV, manentibus ijſdem diſtantijs MC, VC &c. invenire oportet æquationem differentialem curvę alterius BM, quæ priorem illam circà C rotatam ſemper in dato conſtanti angulo ſit ſectura.

35 Ducta quavis recta per centrum rotationis C ut CA, aſſumatur portio ad arbitrium CA, qua ut radio, circulus ducatur AG, aſſumaturque punctum A, ut initium rotationis. Iàm concipiatur curva MV perveniſſe ad quamvis poſitionem LB, ibique in B ſecare quæſitam curvam BM in angulo OBF dato, & conſtante, quem ſcilicèt continent duæ tangentes, una BO ad curvam datam, altera BF ad quęſitam ductæ in puncto B quo ſe mutuò ſecant, jungaturque CB, & ad illam per C perpendicularis CF, ſecans BO in D, & BF in F, undè ad BO cadat perpendicularis FO. Eſto CG = a, ſinus rectus anguli OBF, poſito radio a, ſit = b, ſinus verò ſui complementi = c. Tum porrò AG = x, BC = y, CD = r, BD = t = $\sqrt{yy + rr}$. Quantitas autèm r datur per y proptèr datam curvæ BL, ejuſque tangentis na-

naturam. Ducta autem Cg ipſi CG infinitè proxima, & arcu infinitè parvo bd, ſi fiat GC, Gg :: CB, bd $= \frac{ydx}{a}$, deindè Bd, db :: BC, CF, $= \frac{yydx}{ady}$, undè BF proptèr rectum angulum BCF $= \frac{y\sqrt{yydx^2 + aady^2}}{ady}$ DF verò $= CF - CD = \frac{yydx - rady}{ady}$, & multiplicando BC per $\frac{1}{2}$ DF, fiet triangulum DFB æquale $\frac{y^3dx - raydy}{2ady}$, quo diviſo per $\frac{1}{2}$ BD orietur OF $= \frac{y^3dx - raydy}{tady}$, cujus quadratum demptum ex quadrato BF relinquit quadratũ BO, quod erit igitùr $= \frac{y^4ttdx^2 + ttaayydy^2 - y^6dx^2 - rraayydy^2 + 2ary^4dxdy}{ttaady^2}$, in quo ſi ſubſtituas pro tt in numeratore valorem $rr + yy$ fiet precisè quadratum, cujus radix BO $= \frac{yyrdx + ayydy}{tady}$; debet autem BO eſſe ad OF ut c ad b, ergò $\frac{yyrdx + yyady}{tady}$, debet eſſe ad $\frac{y^3dx - raydy}{tady}$ ut c ad b, & pro indè erit æquatio $yycdx - racdy = byrdx + byady$, & hinc $dx = \frac{byady + racdy}{yyc - byr}$ æquatio differentialis primi gradus pro curva quæſita, in qua ſigna poſſunt interdùm

dùm

dùm variè eſſe locata, pro ut duæ tangentes BO, BF ad eaſdem, vel ad diverſas axis partes ceciderint. Hunc valorem differentialis dx nempè quod ſit $= \frac{baydy + cardy}{yyc - byr}$ ſi multiplices ſuperiùs,& inferiùs per $cy + br$ fiet ęquatio quæſita pro curva BM, $dx = \frac{bacyydy + ccarydy + bbarydy + cabrrdy}{ccy^3 - bbrry}$, vel $= \frac{bacyydy + ccarydy + bbarydy + cabrrdy}{ccy^3 + bby^3 - bbrry - bby^3}$, undè ponendo aa pro $cc + bb$, & tt pro $rr + yy$, fiet $\frac{a^3rydy + ttcabdy}{aay^3 - ttbby} = dx$. Si angulus OBF fuerit rectus, evaneſcente c fiet $dx = \frac{ady}{r}$, quod manifeſtiùs apparebit ſi utamur æquatione ſuperiùs inventa $dx = \frac{byady + racdy}{yyc - byr}$.

COROLL.

36 SI duæ quantitates c, & b, non eſſent conſtantes, ſed data quavis lege variabiles, dùmmodò datæ per y, & conſtantes quot libuerit, ut ſi exempli gratia angulus OBF non conſtans, ſed æqualis angulo CBO eſſe deberet, aut etiàm ipſius CBO duplus, vel etiàm alitèr infinitis modis, ſemper eadem æquatio locum habet, ſi per b, & c intel-

telligamus ſinum, & ſinum ſecundum anguli OBF, quicumque ille tandem ſit, & quamcumque legem ſervare debeat. Ut ſi OBF debuiſſet fuiſſe æqualis CBO, b & c deberent eſſe ad invicèm ut r ad y, vel ſi OBF $=$ 2 CBO, tùnc c ad b fuiſſet ut $rr - yy$ ad $2yr$, & ſic in alijs infinitis caſibus.

Digitized by Google

SECTIO II.

De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, quando conſtet illas eſſe integrabiles algebraicè.

PROPOSITIO I.

37 POſtquàm igitùr ad æquationem differentialem Lineę quæſitæ alicujus, per ſupra traditas, aùt per ſimiles, methodos pervenerimus, & illam integrabilem eſſe conſtet, hoc eſt conſtet, quod ſint invenibiles duæ quantitates algebraicæ, quarum differentialia invicèm æquata reſtituant priùs inventam ęquationem, tùnc vel illæ duæ quantitates algebraicæ invicèm æquentur, vel ſingulis illis conſtans quædam ad arbitrium addatur, vel dematur (niſi aliqua quæſitæ lineæ data conditio hoc vetuerit) & ſummæ vel differentię invicèm etiàm æquentur, utrovis enìm modo reſultabit ęquatio algebraica pro linea quæſita, quam proindè Carteſiano more ex alterutra, vel utraque harum æquationum algebraicarum conſtruere licebit.

38 Nàm, reductis ſingulis æquationis conſtruen-

ſtruen-

ſtruendę partibus ad unam dimenſionem ope diviſionis utrinquè inſtitutæ per eandem conſtantem, poſitiſque AB, Ab abſciſſis lineę quęſitæ, ſivè cujus differentialis æquatio datur, & poſito curvam DA eſſe talem ut ordinatę DB ſint æquales integralibus unius ex partibus datę æquationis (quæcumque tandèm ſint hæc integralia) ſimiliterque curvam CF talem eſſe ut ordinatæ BF ſint ęquales integralibus alterius partis æquationis datæ, ſitque bd ipſi BD infinitè proxima, fb verò ipſi BF, erunt (ductis DE, GF axi parallelis) duæ lineolæ Ed, Gf infinitè parvæ illę eædem quæ per duas æquationis datæ partes exprimuntur, quę proindè ubique erunt invicèm æquales. Cum enim Ed, fG ſint differentialia linearum BD, BF, & cum lineæ BD, BF ſint integralia duarum partium ęquationis conſtruendæ, erunt Ed, fG ipſę illę partes ęquationis, quam debemus conſtruere, quæ cum per hypoteſim ſint ſemper ad invicèm æquales, erunt ipſe Ed, Gf, ſemper æquales. Adſunt igitùr duæ quantitatum ſeries BD, bd &c. BF, bf &c. tales ut augmentum unius cujuſvis quantitatis bd in prima ſerie ſuprà antecedentem BD, ſit æquale augmento correſpondentis quantitatis bf in ſecunda ſerie ſuprà ſuam antecedentem BF. Quotieſcumque autèm habentur duæ tales ſeries, quarum termini per æquales differentias augeantur, hoc eſt terminus quivis unius ſeriei ſuprà ſuum antecedentem æque augeatur ac terminus

correſpondens ſecundę ſuprà ſuum, quotieſcumque dantur inquàm duæ tales ſeries, neceſsarium eſt quod unus quivis terminus primæ ſeriei ęqualis ſit ſuo correſpondenti in ſecunda ſerie, aùt quod ſaltèm ab illo differat quadam quantitate conſtante, quæ porrò eadem, ſit etiàm differentia inter quamvis aliam quantitatem primæ ſeriei, & ſuam correſpondentem in ſecunda. Quia enìm quantitates primæ ſeriei æque augentur, ac quantitates correſpondentes ſecundæ, ſi ſemèl tantùm quantitas una primæ ſeriei æqualis ſit correſpondenti quantitati ſecundæ, ſemper æquales erunt quantitates primæ, correſpondentibus quantitatibus ſecundæ ſeriei, proptèr æquale earum augmētum, aùt ſi ſemèl quantitas una primæ, ſuperaverit correſpondentem quātitatem ſecundæ ſeriei, vel ab illa deffecerit, ſemper eodem exceſſu, vel deffectu different ab invicèm quantitates ſingulæ prioris, & correſpondentes quantitates poſterioris ſeriei. Igitùr conditio quam habemus, pro curva conſtruenda, & quæ differentiali æquatione exprimitur, quod Ed ſit ubique æqualis Gf, ſalvatur tàm ponendo ubique BD = BF, quàm ponendo ſingulas BD, differre à ſingulis BF quodam conſtante valore arbitrario. Sunt autèm BD, BF integralia duarum partium datę æquationis, igitùr, vel ponas hæc integralia ad invicèm æquari, vel eorum conſtantem eſſe arbitrariam quamuis differentiam, ęquæ ſalvabis differentialem ęqua-

ęquationem propoſitam, hoc eſt ęque obtinebis quæſitam curvam. Hocque ratiocinium, nullatenùs requirit quod BD, BF ſint quantitates algebraicæ, ſed cujuſvis ſint generis lineæ, ſemper vim ſuam poteſt obtinere. Conſideramus autèm hìc peculiaritèr integralia algebraica, quia, cum talia ſunt, eorum valores invicèm æquati, addita quavis ad arbitrium conſtante, algebraicam ſuppeditant æquationem juxtà notas regulas conſtruendam, quod longè alitèr ſe habet, cum integralia non ſunt algebriaica, ut ſequentibus ſectionibus videre poterimus.

COROLLARIUM.

39 HÆc conſtantis additio, quæ fieri ſemper poteſt poſt integrationem ęquationis, interdùm curvam natura invariatam, poſitione tantùm promovet, interdùm curvæ ipſius eſſentiam, & genus mirum in modum diverſificat. Si enim exiſtentibus x vel y ordinatis rectis invicèm parallelis, ęquatio differentialis propoſita ad conſtruendum ab una parte habuerit dx vel dy tantùm, & ſimùl fuerit algebraicè integrabilis, dùm interìm x vel y alteram ęquationis partem non ingrediatur, in hoc caſu æquationi, quæ per illius integrationem obtinebitur addendo, vel demendo conſtantem, curva eadem remanet, ab axe tantùm remotior, vel illi

pro-

proximior facta, per totam quantitatis illius conſtantis longitudinem. Res erit clarior, & certa ſi illam exemplo explicemus. Eſto æquatio conſtruenda $dy = \frac{dx\sqrt{aa+ax.}}{a}$ Hęc ſi integretur dabit $y = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax,}}{3a}$ vel $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax,}}{3a}$ quod pro nùnc ſyntheticè poterimus experiri. Harum duarum ęquationum prima exprimit quamdam curvam, quæ ſi ſic removeatur ab axe ſuper quo aſſumuntur abſciſſæ x, aùt ad illum accedat per diſtantiam a, hoc eſt ſingula ejus puncta accedentia ad axem, vel ab illo recedentia, lineas deſcribant ordinatis parallelas, & longitudinis a, jàm æquatio, quę referet curvam ſic translatam ad eundem axem, ad quem prius referebatur erit $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax,}}{3a}$ undè hæc ęquatio eandem quam prior illa curvam exprimit, ſed poſitione tantùm diverſam. At ſi æquatio fuiſſet exempli gratia $ydy = \frac{x^3dx}{aa}$ in qua nec dy nec dx unam æquationis partem conſtituere poteſt, ſalva æquationis integrabilitate, tùnc conſtantis additio, curvam maximè variare poterit. Integrando enim æquationem fit $\frac{yy}{2} = \frac{x^4}{4aa}$ vel $\frac{yy}{2} \pm aa = \frac{x^4}{4aa}$, ex quibus

ęqua-

Digitized by Google

ęquationibus oritur vel $y = \frac{xx}{\sqrt{2aa}}$, vel $y = \sqrt{\frac{x^4 \pm 4a^4}{2aa}}$ qui ordinatæ valor non differt per conſtantem ab alio valore $\frac{xx}{\sqrt{2aa}}$ vel $\sqrt{\frac{x^4}{2aa}}$. Idem dices ſi coordinatæ x, & y non eſſent rectę, aut applicatę non eſſent invicèm parallelæ, quibus caſibus infinitis modis variari poteſt curvę natura per ſimplicem conſtantis additionem uni ęquationis parti adhibitam.

COROLL. II.

40 Cum igitùr arbitraria ſit conſtantis hujus additio, poterimus per quodvis datum punctum curvam lineam ducere, dati axis, & verticis quę ſalvet datam ęquationem differentialem primi gradus algebraicè integrabilem, hac uſi methodo, quam clariùs exponi non poſſe cenſeo, quã ſi illam tradamus exemplo alicui applicatam. Aſſumamus, ęquationem differentialem datam eſſe $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, & debeat duci linea ſatisfaciens huic ęquationi differentiali, quę tranſeat per datum punctum, per quod exempli gratia ordinata ſit = b, & abſciſſa = c, cujuſvis ſint generis coordinatę, vel ſcilicèt rectę, vel curvę, vel invicèm parallelę, vel à cõmunibus punctis egredientes, vel ad angulos quoſvis ad ſe invicèm inclinatæ &c. Inte-

proximior facta, per totam quantitatis illius conſtantis longitudinem. Res erit clarior, & certa ſi illam exemplo explicemus. Eſto æquatio conſtruenda $dy = \frac{dx\sqrt{aa+ax}}{a}$. Hęc ſi integretur dabit $y = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, vel $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, quod pro nùnc ſyntheticè poterimus experiri. Harum duarum ęquationum prima exprimit quamdam curvam, quæ ſi ſic removeatur ab axe ſuper quo aſſumuntur abſciſſæ x, aùt ad illum accedat per diſtantiam a, hoc eſt ſingula ejus puncta accedentia ad axem, vel ab illo recedentia, lineas deſcribant ordinatis parallelas, & longitudinis a, jàm æquatio, quę referet curvam ſic tranſlatam ad eundem axem, ad quem prius referebatur erit $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, undè hæc ęquatio eandem quam prior illa curvam exprimit, ſed poſitione tantùm diverſam. At ſi æquatio fuiſſet exempli gratia $ydy = \frac{x^3dx}{aa}$ in qua nec dy nec dx unam æquationis partem conſtituere poteſt, ſalva æquationis integrabilitate, tùnc conſtantis additio, curvam maximè variare poterit. Integrando enìm æquationem fit $\frac{yy}{2} = \frac{x^4}{4aa}$ vel $\frac{yy}{2} \pm aa = \frac{x^4}{4aa}$, ex quibus

ęqua-

ęquationibus oritur vel $y = \frac{xx}{\sqrt{2aa}}$, vel $y = \sqrt{\frac{x^4 \pm 4a^4}{2aa}}$ qui ordinatæ valor non differt per conſtantem ab alio valore $\frac{xx}{\sqrt{2aa}}$ vel $\sqrt{\frac{x^4}{2aa}}$. Idem dices ſi coordinatæ x, & y non eſſent rectę, aut applicatę non eſſent invicèm parallelæ, quibus caſibus infinitis modis variari poteſt curvę natura per ſimplicem conſtantis additionem uni ęquationis parti adhibitam.

COROLL. II.

40 CUm igitùr arbitraria ſit conſtantis hujus additio, poterimus per quodvis datum punctum curvam lineam ducere, dati axis, & verticis quę ſalvet datam ęquationem differentialem primi gradus algebraicè integrabilem, hac uſi methodo, quam clariùs exponi non poſſe cenſeo, quā ſi illam tradamus exemplo alicui applicatam. Aſſumamus, ęquationem differentialem datam eſſe $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, & debeat duci linea ſatisfaciens huic ęquationi differentiali, quę tranſeat per datum punctum, per quod exempli gratia ordinata ſit = b, & abſciſſa = c, cujuſvis ſint generis coordinatę, vel ſcílicèt rectę, vel curvę, vel invicèm parallelę, vel à cōmunibus punctis egredientes, vel ad angulos quoſvis ad ſe invicèm inclinatæ &c. Inte-

tegretur ęquatio propoſita,& erit $\frac{yy}{2} = a\sqrt{aa+xx}$.

Nùnc quęrendum eſt, quęnam conſtans ex infinitis, quæ addi poſſunt utrique æquationis parti addenda nunc ſit, ut curva hęc tranſeat per punctum cujus coordinatæ ſunt b & c, b quidèm de ſerie ipſarum x, c verò ipſarum y. Vocetur hæc conſtans zz, & erit $\frac{yy}{2} + zz = a\sqrt{aa+xx}$, undè $y = \sqrt{2a\sqrt{aa+xx} - 2zz}$, debet autèm quando x eſt b, y eſſe $= c$, ergò ſi in quantitate $\sqrt{2a\sqrt{aa+xx} - 2zz}$ ponamus b pro x fiet $\sqrt{2a\sqrt{aa+bb} - 2zz} = c$, undè $cc = 2a\sqrt{aa+bb} - 2zz$, & tãdẽ, $zz = \frac{2a\sqrt{aa+bb} - cc}{2}$, quę eſt quantitas conſtans addenda in integratione æquationis, ut curva per datũ punctũ tranſeat, ſicque curva queſita erit $\frac{yy + 2a\sqrt{aa+bb} - cc}{2} = a\sqrt{aa+xx}$, cui competit differentialis æquatio propoſita $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa+xx}}$, quęque ſimùl per datum punctum tranſit. Si valor quantitatis zz prodiret imaginarius, quod accidere poteſt, nulla curva per datum punctum ducibilis foret ad datam æquationem differentialem convenientèr in dato axe & vertice.

Exem-

Exemplum.

41 INvenire curvam cujus ſubſtangens aùt ſit media intèr coordinatas x,& y, aùt duarum mediarum vel prima, vel ſecunda, aùt uno verbo ſit una ex ſerie continvarum geometricè proportionalium quarum prima ſit x, ultima y, & termini ſint nnmero $m + 2$, ut numerus datus exprimens quota ſit in hoc ordine vocetur n. Intèr x,& y ſi ponantur m numero mediæ proportionales, fiet ſeries ex qua debet deſumi valor ſubtágentis quæſitæ curvę, erit enìm ſeries cujus primus terminus x, ultimus y, & teminierunt numero $m + 2$, quia duobus x, & y accedunt alij numero m, qui illis interponuntur. Notum eſt autèm, quod ſi intèr duas x, & y interponantur m numero medię proportionales, erit harum mediarum prima, quæ in ordine ſeriei ſecundus erit terminus $= x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, porrò ſecunda mediarum erit hujus quadratum per x diviſum, tertia erit cubus per xx diviſus, & quæ mediarum erit (ut ita dicam) $\overline{n-1}$ eſima, exprimetur per poteſtatem $\overline{n-1}$ eſimam hujus prioris mòx expoſitæ diviſam per poteſtatem $\overline{n-2}$ eſimam literæ x. Quæ verò mediarum eſt $\overline{n-1}$ eſima, illa eſt in ordine ſerìei n eſima, quæ æquari debet ſubtan-

 gen-

genti ex vi datæ hypotheſeos. Fiat igitùr talis poteſtas hujus lineæ $x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, & dividatur per poteſtatem lineæ x à numero $n-2$ denominatam, & erit $x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$ æqualis ſubtangenti. Undè $\frac{ydx}{dy} = x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$, undè oritur æquatio $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx = y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$, quę ęquatio eſt integrabilis; omnis enìm poteſtas indeterminatæ in differentiale indeterminatę ejuſdem ducta quantitatem integrabilem conſtituit, cujus integrale eſt eadem poteſtas ejuſdem indeterminatę unitate tamèn aucta, & per exponentem ejuſdem poteſtatis unitate ſimilitèr auctum diviſa. Integrale ex $= z^r dz$ eſt $\frac{z^{r+1}}{r+1}$, quod facilè experieris ſyntheticè, & ſi differentiationis legem attentè proſequamur, poterimus hoc etiàm à priori, & ex rei natura nobis ſuadere. Eâdem igitùr de cauſa integrale ex $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx$ erit $\frac{\overline{m+1}\ x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, & integrale ex $y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$ erit $\frac{\overline{m+1}\ y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, quæ duo differentialia invicèm ęquen-

æquentur, aùt addatur quævis conſtans ad libitum, orientur æquationes algebraicæ pro curva quam quærimus; & erit vel $\frac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} = \frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$

vel etiàm $\frac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} \mp a^{\frac{n-1}{m+1}} = \frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$.

Harum duarum æquationum prima reducitur ad $x = y$, ſecunda verò, factis debitis operationibus, reducitur ad $\frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1} = x^{\frac{n-1}{m+1}}$,

ex qua extrahendo radicem cujus exponens eſt $\frac{n-1}{m+1}$,

eruetur valor ipſius x qui erit radix exponentem habens $\frac{n-1}{m+1}$ extracta ex illa quantitate ſupracitata

$\frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1}$. Hæ duæ ęquationes, ſi conſtruantur, lineas ſuppeditant omninò diverſas; clarum eſt enim primam $x = y$ eſſe rectam in angulo ſemirecto ad axem, ſi ordinatæ axi normales ponantur, quęcumque ſint poteſtates *n*, & *m*; at verò aliam æquationem eſſe pro curva quadam, quæ varia eſt pro vario numero *m* mediarum intèr x, & y cadentium, & etiàm pro varia poteſtate *n*.

genti ex vi datæ hypotheſeos. Fiat igitùr talis poteſtas hujus lineæ $x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, & dividatur per poteſtatem lineæ x à numero $n-2$ denominatam, & erit $x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$ æqualis ſubtangenti. Undè $\frac{ydx}{dy} = x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$, undè oritur æquatio $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx = y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$, quę ęquatio eſt integrabilis; omnis enìm poteſtas indeterminatæ in differentiale indeterminatę ejuſdem ducta quantitatem integrabilem conſtituit, cujus integrale eſt eadem poteſtas ejuſdem indeterminatę unitate tamèn aucta, & per exponentem ejuſdem poteſtatis unitate ſimilitèr auctum diviſa. Integrale ex $= z^{r} dz$ eſt $\frac{z^{r+1}}{r+1}$, quod facilè experieris ſyntheticè, & ſi differentiationis legem attentè proſequamur, poterimus hoc etiàm à priori, & ex rei natura nobis ſuadere. Eâdem igitùr de cauſa integrale ex $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx$ erit $\frac{\overline{m+1}\, x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, & integrale ex $y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$ erit $\frac{\overline{m+1}\, y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, quæ duo differentialia invicèm ęquen-

æquentur, aùt addatur quævis conſtans ad libitum, orientur æquationes algebraicæ pro curva quam quærimus; & erit vel $\frac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} = \frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$

vel etiàm $\frac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} \mp a^{\frac{n-1}{m+1}} = \frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$.

Harum duarum æquationum prima reducitur ad $x=y$, ſecunda verò, factis debitis operationibus, reducitur ad $\frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1} = x^{\frac{n-1}{m+1}}$, ex qua extrahendo radicem cujus exponeus eſt $\frac{n-1}{m+1}$, eruetur valor ipſius x qui erit radix exponentem habens $\frac{n-1}{m+1}$ extracta ex illa quantitate ſupracitata $\frac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1}$. Hæ duæ ęquationes, ſi conſtruantur, lineas ſuppeditant omninò diverſas; clarum eſt enim primam $x=y$ eſſe rectam in angulo ſemirecto ad axem, ſi ordinatæ axi normales ponantur, quęcumque ſint poteſtates n, & m; at verò aliam æquationem eſſe pro curva quadam, quæ varia eſt pro vario numero m mediarum intèr x, & y cadentium, & etiàm pro varia poteſtate n.

Exempli gratia, ſi ſubtangens debeat eſſe in quatuor proportionalium ſerie ſecunda, ſivè debeat eſſe prima duarum mediarum proportionalium, quæ ſunt intèr x, & y, tùnc exiſtente $m = 2$, & $n = 2$, æquatio invenietur eſſe $\frac{3\sqrt[3]{y} \pm \sqrt[3]{a}}{} = \sqrt[3]{x}$, ſivè

$$x = \frac{27y + 9\sqrt[3]{aay} \pm 27\sqrt[3]{ayy} \pm a}{27}.$$

COROLL.

42 Regula pro integrandis quibuſvis alicujus indeterminatę poteſtatibus, quam mòx attulimus, ſi poteſtas ſit -1, nō deducet ad integrale aſſignabile, quia ſi habeatur $y^{-1}dy$, quæ ſit integranda, & traditam regulam adhibeamus augendo unitate exponentem -1 & dividendo deindè poteſtatem ipſius y per eundem exponentem -1 unitate auctum, ut pręcipit regula allata, fiet integrale $= \frac{y^0}{0}$ ſivè $= \frac{1}{0}$ quantitas infinita, & inaſſignabilis. Quarè hic tantùm caſus excludendus venit à regula, quam dedimus, & ab exemplo ſuperiùs adhibito, quo uſq; hoc integrale quantitatis $y^{-1}dy$ diligentèr ex pendamus, quod ſuo loco ſumus facturi.

Exem-

Exemplum II.

43 Curva quæratur, quę ſubtangentem habeat quantitatẽ $a^{1-m}y^{m} \pm b^{1-n}y^{n} \pm c^{1-r}y^{r}$ &c. quantitatem ſcilicèt compoſitam ex quotvis membris in quorum ſingulo y reperiatur ad aliquam dimenſionem elevata, per quævis ſigna invicèm junctis; erit æquatio $\frac{ydx}{dy} = a^{1-m}y^{m} \pm b^{1-n}y^{n}$ &c. & $dx = a^{1-m}y^{m-1}dy + b^{1-n}y^{n-1}dy + c^{1-r}y^{r-1}dy$ quæ æquatio integrabitur, dummodò unicuivis membro $a^{1-m}y^{m-1}dy$ applicetur methodus propoſitionis præcedentis pro integrandis poteſtatibus indeterminatarum, erit igitùr $x = \frac{a^{1-m}y^{m}}{m} \pm \frac{b^{1-n}y^{n}}{n} \pm \frac{c^{1-r}y^{r}}{r}$ &c. procedendo ſemper per eadem veſtigia, quicumque ſit horum membrorum numerus. Quod ut peculiari quodam exemplo illuſtretur opus eſt tantùm quantitatem $a^{1-m}y^{m} \pm b^{1-n}y^{n}$ &c. determinare, determinatis duabus literis *m*, & *n*, ut *m* ſit $= 2$, *n* $= 4$, ſicque ſubtangens eſſe debebit (poſitis quantitatibus a & b eſſe invicèm ęqualibus, & vocando illas b) $\frac{bbyy - y^{4}}{b^{3}}$, & ęquatio differentialis $dx = \frac{bbydy - y^{3}dy}{b^{3}}$, undè integrando

$x =$

Digitized by Google

$x = \frac{bbyy}{2b^3} - \frac{y^4}{4b^3}$, vel $x = \frac{2bbyy - y^4}{4b^3}$. Quo pacto etiàm ſi ſubtangens debuiſſet fuiſſe $\frac{yy}{a} + \frac{y^5}{a^3}$, aut $\frac{a^3yy + y^5}{a^3}$, æquatio per hanc regulam inventa fuiſſet $x = \frac{5a^3yy + 2y^5}{10a^4}$. Harum curvarum primam

Fig. 6. exprimit Figura ſexta in qua curva EFACD &c. talis eſt, ut ejus ſubtangens BT in axe AB ſit ſemper $\frac{bbyy - y^4}{b^3}$, poſitis $AB = x$, $BD = y$. In hac curva AG maxima x eſt $= \frac{1}{4} b = \frac{1}{4} AK$, AH verò $= \sqrt{2bb}$. Punctum contrarii flexus eſt in C per quod ordinata $CB = \sqrt{\frac{1}{3}bb}$, & abſciſſa $AB = \frac{5}{36} b$. Curvâ verò

Fig. 7. alteram nempè $x = \frac{5a^3yy + 2v^5}{10a^4}$ exhibet figura ſeptima curvæ enìm IACGDE tangens IT abſcindit ex axe HA ſubtangentem $HT = \frac{a^3yy + y^5}{a^4}$ ut requirebatur, poſitis $AH = x$, $HI = y$. Habet etiàm hęc contrarium flexum in C, poſita $AB = \sqrt[3]{\frac{1}{4}a^3}$, & $CB = \frac{9}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{16}a^3}$, eſt autèm $AF = a$ cui competit maxima abſciſſa x, ſive $GF = \frac{3}{10} a$. Secat hæc curva axem AD in D, poſita $AD = \sqrt[3]{\frac{5}{2}a^3}$.

CO-

COROLL.

44 EX omnibus poteſtatibus indeterminatæ y, quæ ſubtangentis valorem ingrediuntur, poſſunt aliquæ, vel omnes eſſe etiàm negativæ, cum *m*, *n*, *r*, &c. numeros etiàm negativos æquè benè ac poſitivos poſſint repręſentare. Sed nullum adeſſe debet membrum in quo y non adſit, ſivè in quo exponens literæ y ſit o, quia facta æquatione $\frac{ydx}{dy} = a^{1-m}y^m \pm by^{1-n}y^n$ &c. ſi vel *m*, vel *n* eſſet o in illa reducenda adeſſet $ay^{-1}dy$, vel $by^{-1}dy$ quod æquationem non algebraicè integrabilem redderet, ut in præced. Coroll. notatum eſt. Pro exemplo exponentium negativorum aſſumatur curva CBHL, cujus ſubtangens exprimatur per $aay^{-1} - a^3y^{-2}$, ſivè per $\frac{aay - a^3}{yy}$, æquatio enim differentialis erit $dx = \frac{aaydy - a^3dy}{y^3}$, hoc eſt $dx = aay^{-2}dy - a^3y^{-3}dy$, quæ membra ſingula per allatam regulam integrabuntur, & fiet $x = \frac{-aa}{y} + \frac{a^3}{2yy} = \frac{a^3 - 2aay}{2yy}$. Curva hæc duas habet partes CBHL, & FM, quarum utraque ad aſymptotos KN, GD. Utriuſque autèm partis ſubtangens, tàm ſcilicet GT, *Fig.* 8,

quàm

quàm ED, optimè exprimuntur, per $\frac{aay - a^3}{yy}$ poſitis GB, EF $=$ y, AE $=$ x. Portio autem CBHL aſymptotum ſecat in C, ità ut AC ſit futura [illegible] a. Exiſtente AI $=$ a, & IH $=$ [illegible] erit punctum H ſummus vertex, punctum verò L contrarii flexus habet AK $=$ [illegible] a, & KL $=$ [illegible] a.

COROLL. II.

45 OMnes hæ curvæ hujus, & antecedentis exempli ſunt ex ijs quarum æquationibus conſtans addita, poſitionem tantùm earum poteſt variare, quia dx ſola unam æquationis integrabilis partem conſtituit.

Exemplum III.

46 QVæritur curva cujus ſubnormalis ſit $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$; erit igitùr æquatio differentialis curvæ quæſitę $ydy = \frac{xdx\sqrt{aa+xx}}{a}$. Et integrando fiet $\frac{yy}{2} = \frac{xx+aa\sqrt{aa+xx}}{3a}$, aùt etiàm $\frac{yy}{2} = \overline{xx+aa}\sqrt{aa+xx} \pm$ quavis conſtante; hæc conſtans brevitatis cauſa ſit $=$ aa, erit igitùr altera curuæ æquatio differẽtialis yy $=$ 2xx

$= \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx} \pm 6aaa}{3a}$. Si utamur prima æquatione $yy = \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx}}{3a}$, fiet curva GKZ talis, ut *Fig. 9.* ejus ſubnormalis EW in axe AW in quo aſſumuntur ipſæ x (exiſtentibus ſcilicèt AE $= x$, EG $= y$) ſit, pro ut poſtulatur $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$. Curva hæc duas habet partes utrinquè ab axe AK ſitas ſibique ſimiles, & æquales GK, KZ, & minima y eſt AK cum $x = 0$, & AK $= \sqrt{\frac{2}{3}aa}$. Habet etiàm ad alteras axis AW partes aliam partem SMQ omninò ipſi GKZ ſimilem, & æqualem, ſimiliterque poſitam; ſi verò uſi fuiſſemus æquatione $yy = \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{xx+aa}+6a^3}{3a}$ curva eſſet HIY priori GKZ aſymptotica minimam ordinatam habens in axe AI ad diſtantiam AI $= \sqrt{\frac{8}{3}aa}$, haberetque hæc etiàm curva partes HI, IY, ſibi æquales ſimileſque, & partes etiàm ſaltèm HIY, VPR ſibi æquales, & ſimiles. Demùm æquatio $\frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx}-6a^3}{3a} = yy$, poſito ſemper ut antè abſciſſas x ſumi ab A in axe AW, ſuppeditat curvam XDF prioribus etiàm aſymptoticam, axemque AW ſecantem in D (unde illa incipit) ut ſit AD $= \sqrt{\sqrt[3]{9a^6}-aa}$ habentemque, non tantùm portionem XD ſimilem, æqualemq; portioni DF,

K ſed

ſed & aliam partem NLO ſimilem æqualemque parti XDF, ità ut omnes curvæ quas in figura nona ruditèr deſignavimus quæſito ſint ſatisfacturæ, & ducta ordinata EFGH, & tangentibus FB, GC, HT, earum normales FW, GW, HW in uno eodemque axis puncto W ſint coituræ ut ſit EW $= \frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$. Curva HIY habet ſanè aliam portionem, quę circà axem DL in Ellipſis quaſi formam jacet, & à puncto D uſquè ad L protenditur, abſcindendo in axe IP, ab A versùs I, & ſimilitèr ab A versùs P portiones $=\sqrt{\frac{4}{3}aa}$; verùm hanc delineare in figura prętermiſimus, quòd illa, licèt ęquatione eadem, ac portio HIY optimè exprimatur, ſubnormalem tamèn habeat $-\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$ non verò $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$, ut requirebatur.

47 Eſt tamèn longè univerſalius Theorema, quod pro integrandis varijs quantitatibus inſervit, quodque univerſaliore exemplo claudemus. Eſto curva invenienda cujus ſubnormalis ſit expreſſa per $\frac{x^{m-1}\sqrt[n]{c^{m+1}+bx^m}\;\frac{m+1+mn-2n}{n}}{a}$. Fiet ęquatio differentialis $ydy = \frac{x^{m-1}dx\sqrt[n]{c^{m+1}+bx^m}\;\frac{m+1+mn-2n}{n}}{a}$, quę erit integrabilis, & in-

integrando erit $\frac{yy}{2} = \frac{n : \overline{c^{m+1} + bx^m}\ \sqrt[n]{\overline{c^{m+1} + bx^m}}^{\frac{m+1+mn-2n}{n}}}{\overline{n+1} : m : b : a}$

$\pm gg$ ſi lubeat, quod experiri poſſumus ut oſtendamus; denotant autèm m, & n numeros quoſvis cujuſvis naturæ. Exempli loco ſint $m = 3$, $n = 2$, ſivè ſubnormalis quæſitæ curvæ ſit $\frac{xx\sqrt{c^4 + bx^3}}{a^3}$, æquatio pro curva quęſita eſt $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{2c^4 + 2bx^3}\sqrt{c^4 + 2bx^3}}{9ba^4}$ aùt ſi $m = 4$, & $n = -2$, ut ſubnormalis ſit $= \frac{x^5}{\sqrt{a^4 + x^4}}$ (poſito omnes c, a, & b eſſe invicèm æquales brevitatis gratia) erit ęquatio curvę per traditam regulam derivata $yy = \sqrt{a^4 + x^4}$ vel $yy = \sqrt{a^4 + x^4} \pm aa$.

Exemplum IV.

48 SI ſubnormalis quęſitę curvę eſſe debeat $\frac{x^3}{a\sqrt{aa + xx}} = \frac{ydy}{dx}$, erit ęqua. $\frac{x^3\,dx}{a\sqrt{aa + xx}} = ydy$ undè integrando erit $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{xx - 2aa}\sqrt{aa + xx}}{3a}$. Univerſaliùs poſita ęquatione $ydy = \frac{x^{4n-1}\,dx}{b^{3n-2}\sqrt{a^{2n} + x^{2n}}}$, erit integrando $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{x^{2n} - 2a^{2n}}\sqrt{a^{2n} + x^{2n}}}{3nb^{3n-2}}$. Et demùm etiàm

Digitized by Google

etiàm univerſaliùs, ſi fuerit æquatio propoſita $ydy = \frac{x^{4n-1}dx}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}\sqrt[m]{a^{2n}+x^{2n}}}$, integrando invenietur $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{x^{2n} - \frac{ma^{2n}}{m-1}} : \overline{a^{2n}+x^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}\, b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}}$ plùs vel minùs cc ſi libuerit; at ſi fuiſſet ęquatio data $ydy = \frac{x^{4n-1}dx}{b^{\frac{4nm-2n-2m}{m}}\sqrt[m]{x^{2n}-a^{2n}}}$, erit integrando $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{x^{2n} + \frac{ma^{2n}}{m-1}} : \overline{x^{2n}-a^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}\, b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}} \pm cc$, ſi libuerit.

Exemplum V.

49 SI integranda ſit $\frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}} = dx$, erit ęquatio integralis (ut ritè experiri poſſumus) $x = \frac{\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} : \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}}{5a}$, ſivè univerſa-

liùs

liùs ad integrandum $dx = \frac{y^{3n-1}dy - y^{2n-1}a^n dy}{\sqrt{2y^n a^{5n-2} - a^{6n-2}}}$

eſſet integrale $x = \frac{\overline{2y^{2n} - 2y^n a^n - 2a^{2n}} : \sqrt{2y^n - a^n}}{10n\, a^{\frac{5n-2}{2}}}$,

& ſi ęquatio fuerit $dx = \frac{y^{3n-1} dy - y^{2n-1} a^n dy}{a^{2n-1+mn} : \overline{2y^n - a^n}^{1-m}}$, erit

facta integratione æquatio ejus integralis quęſita $x = \frac{\overline{2y^{2n} - 2y^n a^n - \frac{1}{m} a^{2n}} : \overline{2y^n - a^n}^{m}}{\overline{8n + 4mn} : a^{nm+2n-1}}$, & demùm

ſi æquatio fuerit $dx = \frac{y^{3n-1}dy - y^{2n-1}a^n dy}{a^{2n-1+mn} : \overline{ry^n - a^n}^{1-m}}$, erit

æquatio ejus integralis $x = \frac{\overline{mmrr + mrr\, y^{2n} + 2rm - rrmm - 2rrm\, a^n y^n + 2 - 2r - rm : a^{2n}} : \overline{ry^n - a^n}^{m}}{\overline{m^3n + 3mmn + 2nm} : r^3 : a^{nm+2n-1}}$

ut ſi eſſet exempli loco $dx = \frac{y^8 dy - a^3 y^5 dy}{a^7 \sqrt[3]{5y^3 - a^3}}$, integrando juxtà hunc ultimum canonem inveniremus $x = \frac{\overline{250y^6 - 340a^3 y^3 - 102a^6} : \overline{5y^3 - a^3}^{\frac{2}{3}}}{10000\, a^7}$

CO-

COROLLARIVM.

50 COnſultò attulimus regulas haſce pro integrandis quanritatibus, quas una tantùm ingreditur indeterminata, ut $x^m dx$ & alias hujuſmodì, quia magni ſunt uſus, & valdè conduceret hos canones, aliaſque tales regulas in ordinem aliqualitèr redactas ſervare, quas tamèn unuſquiſque facilè ſibi parare poteſt. Nulla enim hactenùs, quod ſciam, inventa eſt methodus, quâ de propoſita quavis quantitate (necdùm ęquatione) etiamſi unica tantùm indeterminata cum ſuo differentiali illam ingrediatur, tutò pronuntiari poſſit nùm illa algebraicè ſit integrabilis necnè. Undè cum incidimus in quantitates tales, de quibus quærendum ſit an ſint integrabiles, magnum eſt ſubſidium ad hos canones recurrere, & ſcrutari an ulli eorum ſit applicabilis quantitas illa. Hoc eſt unum ex præcipuis, quæ in Analyſi hac adhùc deſiderantur, methodus ſcilicèt, quâ dum proponitur quantitas quævis integranda, aùt ejus integrale algebraicum aſſignare, aut impoſſibilitatem ejus aſſignandi demonſtrare doceamur. Quod ſi quis invénerit, ſe tandiù quæſitas hyperboles, circulique infinitaſque alias quadraturas reperiſſe ſciat, aſſignato ſcilicèt ſpatio rectilineo algebraico hyperbolicis, circularibuſque ſpatijs prorsùs æquali, aùt de-

demonſtrata ejus impoſſibilitate , de qua cum multi multa ſcripſerint , eamque ſolidè ſe oſtendiſſe præſumpſerint , nondùm omnem rei difficultatem exhauſtam eſſe dubitamus.

Digitized by Google

SECTIO III.

De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, quando non ſint algebraicè integrabiles, &, pratèr utriuſque indeterminatæ differentialia ad altiorem poteſtatem non elevata, continent alterutram tantùm indeterminatarum.

PROPOSITIO I.

51 ACcidit ſæpenumerò, ut data curvæ quam quærimus conditio talis ſit, quæ ad æquationem differentialem primi gradus nos deducat non integrabilem algebraicè, ſed quæ tamèn utriuſque indeterminatæ differentialia (quę neceſſarium eſt in ęquatione differentiali inveniri) ſimplicia, ſivè ad primam tantùm dimenſionem elevata habeat, & inſupèr unam tantùm indeterminatarum, altera omninò ex æquatione ſejecta, contineat. Quo in caſu curvę quęſitæ conſtructio independentèr à quadratura ſpatii cujuſdam, quod mox inveniemus, haberi non poterit, aùt ſaltèm dependebit ab alterius cujuſdam problematis ſolutione, eandem hanc quadraturam involuente.

52 Om-

Digitized by Google

52 Omnis æquatio in qua unica tantùm indeterminatarum inveniatur, præter utriuſque indeterminatę differentialia ad majores poteſtates non elevata ad hanc formam reducibilis erit $dz = qdu$. Voco ſcilicèt z indeterminatam illam, cujus in æquatione differentiale ſimplex ſivè ad primam tantùm poteſtatem elevatum reperitur, & pręterea nullo modo illa in æquatione apparet; u verò eſt altera indeterminata, quæ cum ſuo differentiali æquationem ingreditur. Cum igitùr ex omni ęquatione, cujuſvis quantitatis quę in illa eſt valor aliquo modo ſit eruibilis, maximè autèm quantitatis, quę nullam poteſtatem altiorem nacta eſt, facilè erit differentialis dz valorem elicere ex ęquationibus de quibus nùnc ſermo eſt, ac proindè ad hos terminos reducere, ut dz ſola unam ęquationis partem conſtituat, reliqua verò pars ſit productum alterius differentialis du in quandam quantitatem, quam voco q, quę proindè erit nullo modo per z, ſed per u, & conſtantes promiſcuè data; eſt ergò $dz = qdu$ formula generalis pro omni ęquatione de qua nunc tractare intendimus. Quantitas autèm q, debet eſſe nullius dimenſionis, ut ſalvetur lex homogeneorum, hoc eſt tot dimenſiones habitura eſt in denominatore quot in numeratore, niſi unitas ſubintelligatur.

53 Igitùr pro conſtructione quæſita; curva deſcribatur AC, cujus abſciſſis AB exiſtentibus = u or- *Fig.* 10

dinatę ad axem perpendiculares ſint aq, tùm verò ſpatio ABC, quod continetur curva ſic deſcripta, & duabus quibuslibet in illa coordinatis AB, BC diviſo per conſtantem rectam lineam a ponatur ubiq; æqualis ordinata BD ad punctum B, eritque D ad quæſitam curvam. Eſt enim AB $=$ u, BC ex hypoteſi $=$ [illegible], BD $=$ z. Spatii ABC elemētum erit aqdu, quarè ſpatii hujus diviſi per conſtantem a elementum erit qdu. Igitùr omnium qdu ſumma, ſivè $\int$qdu, hoc eſt ſpatium ABC æquat z ordinatam lineę AD $=$ z, undè z $= \int$ qdu, & dz $=$ qdu, quæ eſt æquatio quam debueramus conſtruere.

COROLL.

54 SI loco ponendi ordinatam FG æqualem ſpatio AFE per a diviſo, & ordinatam HI æqualem ſpatio AHK per a itèm diviſo, & ſic de cęteris, poneremus FL æqualem ſpatio FECB per a diviſo, & HM æqualem ſpatio HKCB per a etiàm diviſo, & ſic ubique ordinatæ fierent æquales, non correſpondentibus ſpatijs totalibus, ſed ſpatijs intèr coordinatas, & conſtantem ordinatam BC clauſis, adhùc de curva ſic deſcripta LMB, eadem differentialis æquatio valeret, ac proindè & illa non minùs ac prædeſcripta GIDA quęſito ſatisfaceret. Quod cla-

clarum ſit conſideranti AF eſſe = u, FE = aq elementum autèm ſpatii FECB eſſe aqdu, idem ac elementum ſpatii totalis AFE; undè FL, quæ ſpatio EFBC per a diviſo æqualis facta eſt, æquè vocari poteſt $\int$ qdu ac tota FG, quarè ſi tàm FL quàm GF vocetur z, erit utriuſque curvæ GIDA, HB eadem differentialis ęquatio reſpectu ejuſdem axis, & verticis, putà dz = qdu. Verùm curva LMB poſitione tantùm differt à curva GIDA, quia ſpatium EFBC differt ubique conſtante ſpatio à totali area EFA, undè & linea FG differet ubique, conſtanti eàdem differentia à linea FL. Quarè linea LMB, eadem eſt ac GID, quæ motu ſibi ipſi parallela acceſſit ad axem per diſtantiam LG, & proindè poſitione tantùm differt à curva GIB.

COROLL. II.

55 POſſunt verò innumeræ aſſignari regulæ pro talium curvarum conſtructione, quas tamèn omnes in idem recidere opus eſt, ſicùt pro inventione duarum mediarum proportionalium intèr duas datas quidquid tenemus, ſemper in parabolæ deſcriptionem, aùt analogum quid collimabit. Sic ſi dividatur quantitatis qdu quadratum $qqdu^2$ in duo quadrata $ppdu^2$, & $rrdu^2$, quorum radices pdu, rdu (ſi fieri poſſit, hoc eſt ſi quadratum quidèm

 pp-

ppdu² talis diviſionis ſit capax) ſint integrabiles, clarum eſt, quod conſtructa curva, cujus coordinatæ ſint hæc integralia quantitatum pdu, & rdu, erit longitudo curvæ ſit deſcriptæ = z ratio eſt, quod ſi ponatur talis curva cujus abſciſſæ ſint integrales rdu, & ordinatæ inregrales pdu, erit elementum curvæ $=\sqrt{rrdu^2 + ppdu^2}$, cumq; ex hypotheſi rrdu² + ppdu² faciant qqdu², erit elementum talis curvæ = qdu, ergò = dz, quarè reddit dz = qdu propoſita æquatio. Sed hæc regula, & quæcumque afferri poſſit pro conſtructione curvæ dz = qdu, ſempèr primæ conſtructioni æquivalebit, quia curvæ longitudo hac methodo adhibita, ęquivalet ſpatio, quod ſecundum priorem methodum quadrare debemus; præterquamquod non apparet adhùc regula, qua omne quadratum qqdu² poſſit dividi in duo quadrata integrabiles radices habentia, quod tamèn ſi fieri poſſe quandoque conſtet in praxi eſt præeligendum, & conſtructio per rectificationes curvatum algebraicarum conſtructioni per quadraturas anteponenda eſt, quia practicè filo curvas facilè metimur, ſpatia verò non itèm. Iàm igitùr ad exempla deſcendamus.

Exemplum.

56 SIt invenienda curva, cujus ſubtangens ſit conſtans. Ergò $\frac{ydx}{dy} = a$, & $dx = \frac{ady}{y}$. Fruſtrà au-

Digitized by Google

autèm tentabimus quantitatem hanc integrare algebraicè; licèt enìm ſcribendo $ay^{-1}dy$, hęc quantitas contineatur ſub canone $y^n dy$, attamèn, ſi regulâ illâ utamur quæ aſsignat $\frac{y^{n+1}}{n+1}$ pro integrali ex (nu. 41) $y^n dy$, inveniemus in hoc caſu quo $n = -1$ integrale eſſe $\frac{ay^0}{0}$ ſive $\frac{a}{0}$ quantitatem infinitam. Undè iàm alia via opus erit conſtructionem moliri. Continetur autèm hæc æquatio $dx = \frac{ady}{y}$ ſub canonica æquatione $dz = qdu$, quia quæ ibì eſt z hìc eſt x, & quæ ibì u hìc y, & quæ ibì q hìc eſt $\frac{a}{y}$. Conſtruenda eſt igitùr curva IHFE, cujus abſciſſis CD exiſtentibus y, ſint ordinatę $DE = \frac{aa}{y}$. Erit ergò curva IHFE ſic conſtructa hyperbola æquilatera, aſymptotos habens axem CD, & lineam CK axi perpendicularem per C, & cujus quadratum CAF ſit aa. Quoniàm autèm curvæ quęſitæ ordinata eſt ęqualis ſpatio curva hac contento per a diviſo, opus erit ſpatio totali aſymptoto CK, curvâ, coordinatiſque CD, DE comprehenſo diviſoque per a ęqualem ponere ordinatam quęſitæ curvę. Verùm ſpatium hoc infinitæ magnitudinis eſſe ſcimus. Ne igitùr conſtructio fruſtretur, cum dixerimus poſſe ab hoc ſpatio conſtans ſpatium ſemper tolli, aſſuma-

manıus pro hoc ſpatio conſtante infinitum ſpatium quod aſymptoto KC, curva, duabuſque invicèm æqualibus coordinatis a ſivè CA, AF clauditur, nec ponamus ordinatam curvæ quam quęrimus ęqualem ſpatio quod aſymptoto CK, curva, & duabus quibuslibet coordinatis clauditur per a diviſo, ſed ſpatiotantùm, quod determinatur ordinata FA, curva, & duabus quibuslibet coordinatis CD, DE, quale eſſetſpatium FADE. Huic igitùr ſpatio per a diviſo ſit æqualis recta DB, eritque punctum B ad curvam, cujus ſubtangens in axe CK erit data conſtans a. Eſt manifeſtum quod, ſpatio FADE evaneſcente, quando CD reperietur eſſe $= CA = a$, tùnc erit $DB = o$, punctumque a in curva quęſita. Deincèps ſi aſſumatur abſciſſa ut CL minor quam a, ſpatium FALH reſpectu ſpatii AFED eſt negativum, undè jàm ordinatę LG fient negativæ, curvaq; BAG quęſita axem ſecabit in A, & utrinque ab illo diverget in infinitum, ad partes verò G, non ultrà aſymptotum CK hyperbolę protendetur.

COROLL.

57 Nemini dubium eſt quìn curva GAB ſic deſcripta, ut ejus ſubtangens in axe, ſeù aſymptoto CK ſit conſtans, ſit ipſa Logarithmica. Erunt igitùr lineę x, ſivè ordinatæ DB ipſarum y, ſivè DC logarithmi. Sunt autèm eædem DC

$= ſ$

$= \int \frac{ady}{y}$, ergò $\int \frac{ady}{y} = ly$, hoc eſt integrale ex $\frac{ady}{y}$ erit ipſe logarithmus quantitatis y ſumptus in logiſtica cujus ſubtangens ſit $= a$. Deincèps igitùr, cum integranda fuerit quantitas aliqua $\frac{ady}{y}$, ſcribemus pro ſuo integrali ly, ſivè logarithmum ex y, advertendo debere logarithmum aſſumi in logarithmica CAB cujus ſubtangens ſit $= a$, & eadem de cauſa integrale ex $\frac{ady}{a+y}$ erit $l\,\overline{a+y}$. Aùt viceverſa, cum differentiandus fuerit ly, aſſumptus in logarithmica, cujus ſubtangens, vel parameter ſit data quęvis a, ſcribemus pro differentiali $\frac{ady}{y}$. Hinc methodus differentiandi ly^n, ſivè poteſtatem quamvis (pro cujus indice pono n) logarithmi indeterminatæ y, erit enim differentiale $\frac{n\,ly^{n-1}\,ady}{y}$, ex regulis calculi differentialis communibus, dummodò tantùm ubi deberet poni differentiale logarithmi, ponatur $\frac{ady}{y}$. Sic novas curvas, curvarumque ſpecies excogitare jàm potes, quarum tangentes invenire, evolutaſque deſcribere, ex hac methodo poterimus; ut ſi fuerint curvæ $x = \frac{ly^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ ubi n, & m quoſvis nu-

numeros integros deſignent, erit $dx = \frac{\frac{n}{m}\, ly^{\frac{n-m}{m}}\, dy}{a^{\frac{n-2m}{m}}\, y}$,

undè ſubtangens $= \frac{\frac{n}{m}\, ly^{\frac{n-m}{m}}}{a^{\frac{n-2m}{m}}} = \frac{nax}{mly} = \frac{nx^{\frac{n-m}{n}}\, a^{\frac{m}{n}}}{m}$,

punctum verò flexus contrarii reperietur ubì $ly = \frac{n-m}{m}\, a$. Harum curvarum notabilis poſitio, quę pro varia numerorum *n*, & *m* habitudine mirabilitèr variata reperitur concipere jubet ſpem, haud grave lectori fore, ſi non inutili fortè digreſſione paulìſpèr ipſis contemplandis immoremur.

58 Porrò triplex diſtinguendus eſt caſus, qui accidere poteſt, poſito ſemper logarithmos ipſarum y ſumi in logiſtica, quam modo deſcripſimus, cujus a ſit ſubtangens, itá ut logarithmus ex a ſive ICA ſit $= o$. Vel enim numerator *n* eſt impar exiſtente denominatore *m* pari, vel *n* eſt par exiſtente *m* impari, vel demùm *n*, & *m* ambo ſimùl ſunt impares. Quo ad primum caſum, cum *n* eſt impar, & *m* par, ſi y ſumatur minor quam a, erit iàm ly negativa quantitas, undè ly^n erit negativa, quia poteſtas impar quantitatis negativæ eſt negativa, ſed $ly^{\frac{n}{m}}$, hoc eſt radix (ut ita dicam) $m^{\text{eſima}}$ negativi ly^n erit imaginaria, quia radix par ex quantitate negativa eſt tantùm imaginaria, igitùr x erit imagina-

naria, & in hoc caſu curva incipiet ab A, & nullam abſciſſam minorem quam a ſortietur. Verùm ſi y aſſumatur ęqualis a, tùnc ly $=$ o undè ſi $\frac{n}{m}$ ſit numerus poſitivus erit x $=$ o, quia omnis poteſtas poſitiva ex o eſt o, ſi ſit negativus erit x infinita, quia poteſtas negativa ex o eſt infinitum quid, & tùnc AL normalis ad CD per A erit aſymptotus talis curvæ. Aſſumpta deindè y majore, atque majore quam a in infinitum, ſemper ly erunt poſitivi, creſcentque in infinitum, undè ordinatæ curvæ noſtræ creſcent in infinitum ſiquidèm $\frac{n}{m}$ fuerit poſitivus, minuentur tamèn in infinitum ſi fuerit negativus, quo in caſu evaneſcent omninò cum fuerit ly infinitus, ſivè y infinita, quarè & CA in illo caſu eſt curvæ aſymptotus. Transferantur lineæ AC, AL, KC in figuram 12, & curva MN repræſentabit primum (fig. 12.) caſum, nempè curvam $x = \dfrac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ quando, exiſtente n impari, & m pari, fuerit $\frac{n}{m}$ negativus. Curva hæc in qua CD $=$ y, DN $=$ x nullam ſortitur y minorem quam AC quæ eſt a, eſtque ad aſymptotos AL, AC illis perpetuò convexitatem oſtendens, nullo enìm contrarii flexus puncto in ſignis eſt, quia, exiſtente $\frac{n}{m}$ negativa, erit $\frac{n}{m} - 1$, ſivè $\frac{n-m}{m}$ negativa,

Digitized by Google

undè $\frac{n-m}{m}$ a, hoc eſt ly in punċto contrarii flexus erit negativus, undè y minor quam a, ſed nulla eſt in his curvis y minor quam a, ergò nullum erit flexus contrarii punctum. Figura autem 13. oſtendit (fig. 13) curvam MN quando $\frac{n}{m}$ æquationis $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$

eſt poſitivus unitate minor, poſito *n* impari, & *m* pari. Nulla in illa CD, ſivè y poteſt eſſe minor quam a; cæterùm tranſit illa per A, versùs AD ſemper concava, nec flexum contrarium, nec maximam minimamve ordinatam ſortitur, tangitque illam AL in A. Dixi nullum adeſſe contrarii flexus punctum quia ſi $\frac{n}{m}$ minor eſt quam 1, erit $\frac{n-m}{m}$ negativa, & proindè, ut factum eſt ſuprà pro figura 12. oſtendetur nullum reperiri hìc poſſe flexum. Tertium caſum, quando in æquatione $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$, exiſtente *n* impari, *m* pari fuerit $\frac{n}{m}$ poſitivus unitate major oſtendit figura 14. in qua curva NM, quæ nullam abſciſſam habet minorem quam a tangitur ab axe AD in A, & (fig. 14.) cum priùs versùs illum convexa ſit, flectitur deindè, & versùs eundem ſit concava, quia in hoc caſu $\frac{n}{m}$ exi-

ſten-

Digitized by Google

ſtente majore quam 1 erit $\frac{n}{m} - 1$ vel $\frac{n-m}{m}$ poſitiva, & hinc $\frac{n-m}{m}$ a poſitiva, quæ cum ſit ly in puncto contrarii flexus, erit hic ly poſitivus, undè y major quam a, hoc eſt abſciſſa puncti contrarii flexus major quam AC, undè reverà, & non imaginariè tantùm reperibile erit in hac curvarum ſpecie.

59 Quando autèm, exiſtente *n* pari, fuerit *m* impar numerus, tùnc vel exiſtat y major, vel minor quam a, ità ut vel ly ſit poſitivus vel negativus, ſemper ly^n erit poſitivus quia *n* eſt numerus par, & exiſtente ly^n poſitivo, erit $ly^{\frac{n}{m}}$ etiàm non modò realis ſed poſitiva quantitas, undè & x, quæ eſt $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ erit realis, & poſitiva, vel y aſſumatur minor, vel aſſumatur major quam a. Poſita porrò y = a, cum ſit ly = o erit tùnc $ly^{\frac{n}{m}}$ infinita, cum $\frac{n}{m}$ fuerit negativus exponens, undè AL eſt aſymptotus curvæ hujus in figura 15. nec erit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ æqualis nihilo, niſi fue- (fig. 15.) rit ly infinita, quod cum accidat, & poſita y infinita, & poſita y = o, ſequetur curvam hanc in infinita di-

Digitized by Google

ſtantia à puncto C ſecturam eſſe axem AC, eundemque etiàm ſecare cum y eſt o ſivè in ipſo puncto C; habet igitùr curva hęc duas partes, MN unam ad aſymptotos AD, AL poſitam, PO alteram, ad aſymptotum AL, proindè aſymptoticam & ipſam parti MN, & quæ ſecat AC in ipſo ſui initio C, ſecatq; ad rectos angulos, ità ut KC tangat illam, ſuntque ambę hæ partes ad eaſdem axis AC partes; contrarium flexum habet in parte PO, quia $\frac{n}{m}$ cum ſit negativa, relinquet negativam quantitatem $\frac{n}{m}-1$ ſivè $\frac{n-m}{m}$, undè $\frac{n-m}{m}$ a ſivè ly in puncto flexus contrarii eſt negativus, quod indicat abſciſſam y puncti illius eſſe minorem quam a, & punctum tale cadere in portione CPO. Si verò, n exiſtente pari, m impari, & $\frac{n}{m}$ poſitivo, fuerit ille minor quam 1, curvam æquationis

(fig.16) $\dfrac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ oſtendet figura 16. In hac curva quęcumque abſciſſa y aſſumatur etiàm ſi minor ſit quam a, competet illi ſua realis & poſitiva x, ut ſuprà diximus de curva figuræ 15. Porrò ſi ly infinita, erit & $ly^{\frac{n}{m}}$, & proindè x infinita, igitùr in puncto C & in puncto axis infinitè diſtante à puncto C erit ordinata infinita.

Si

Si verò y = a, ly = o, erit $ly^{\frac{n}{m}} = x = o$, tranſit ergò per A curva hæc, quæ ad aſymptotum CK eſſe debet ex viſis, duaſque habet portiones in communi illo punćto invicèm junćtas APO, AMN & communem tangentem AL,& ad eandem axis AC partem locatæ ſunt. Portio AMN eſt verſus axem ſemper concava, ſed portio APO, cum primò verſus AC concava ſit, flećtitur ad alteras partes, & fit convexa, & ad aſymptotum KC conſtituta in infinitum intèr KC & AL protenditur. Ratio eſt quia $\frac{n}{m} - 1$ eſt negativus numerus ſive $\frac{n-m}{m}$ a negativa quantitas quę cum ſit ly pertinentis ad punćtum contrarii flexus, erit y minor quam a, undè &c. Tandèm ſi *n* fuerit par, *m* impar, $\frac{n}{m}$ poſitivus & major quam 1, figura 17. utendum erit. Poſita y minore quam a, ſivè ly (*fig*.17.) negativa, poſitiva tamèn erit $ly^{\frac{n}{m}}$ ſiuè x, & quidèm infinita quotiès ly ſit infinita ſivè y infinita ſit vel ſit o, quandoquidèm $\frac{n}{m}$ exponens poſitivus eſſe ſupponitur. Si ly ſit o, erit & x = o, undè curva tráſit per púćtum A in quo ly eſt o, & y eſt a. Tangitur autèm ibì curva ab axe AC, & duas partes format quę ad eaſdem axis AC partes locantur quarum una APO, versùs AC continuò convexa reperietur, & ad aſymptotum KC poſita, altera AMN primò quidèm versùs

axem

Digitized by Google

axem illum convexitatem obvertit, mòx verò concavitatem, quia flexum habet ex eo quod $\frac{n-m}{m}$ a, qui eſt logarithmus ex abſciſſa puncti contrarii flexus eſt poſitivus (propter $\frac{n}{m}$ maiorē quā 1 hoc eſt $\frac{n}{m}-1$ poſitivam, & $\frac{n-m}{m}$ & $\frac{n-m}{m}$ a poſitivam) undè y major quam a; deindè curvæ portio AMN in infinitum ab axe AC versùs illum concava elongatur.

60 Tertius caſus eſt, cum n & m ambo ſimùl numeri ſunt impares. Et primò quidem eſt manifeſtum, quod ſi ly ſit negativus, vel y minor quam a, ly^n erit negativa, quia n eſt impar numerus, erit verò poſitiva ſi ly ſit poſitivus; $ly^{\frac{n}{m}}$ autèm erit vel poſitivus, vel negativus pro ut ly^n fuerit vel poſitivus, vel negativus, quia radix impar poteſtatis imparis, eſt poſitiva, ſi quantitas illa ſit poſitiva, negativa, ſi illa ſit negativa, ſed ſemper realis. Conſiderando igitùr primò caſum quo n &, m exiſtentibus imparibus ſit $\frac{n}{m}$ negativa, repræſentare illum poterimus per figuram 18. Poſito enìm in hoc caſu ly eſſe infinitam, erit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}} = o$, undè in puncto C, (fig.18.)

in quo cum y ſit o eſt ly infinita, & in alio puncto in axe AC infinitè diſtante à puncto C erit x = o tran-

Digitized by Google

tranſit igitur curva per C, & eſt ad aſymptotum AC. Porrò ſi ly $= o$, erit ly $^{\frac{n}{m}}$ infinita; ergò in puncto A x erit infinita, & curva eſt ad aſymptotum etiàm AL. Habet porrò curva hæc duas partes unam COP ad partes K axis AC locatam, per C tranſeuntem, adque rectum angulum axi AC inſiſtentem, ad aſymptotum autèm AL exiſtentem, punctoque contrarii flexus affectam, quia ſi $\frac{n}{m}$ eſt negativa, erit & $\frac{n}{m}-1$ & $\frac{n-m}{m}$, & $\frac{n-m}{m}$ a, proindè & ly negativa, & y minor quam a; altera pars MN curvæ hujus eſt ad alteras axis AC plagas deſcribenda, ad aſymptotos AC, AL, ſemper versùs illas convexa, ut oſtendit figura. Quando fuerit $\frac{n}{m}$ poſitivus, ſed unitate minor, exiſtentibus interìm utroque *n*, & *m* impari, tùnc figura 19. exprimet (*fig.* 19.) curvam æquationis $x = \dfrac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{m-n}{m}}}$ duas partes habētem. Pars AMN quæ reſpectu axis AC ad plagam L jacet, ſemper concava eſt versùs axem illum, & ab illo in infinitum digreditur, tangiturque ab axe coniugato AL in puncto A perquod tranſit, eo quod cum $\frac{n}{m}$ ſit poſitivus exiſtente ly $= o$ ſivè y $= a$, erit

$\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ ſivè x = o. Pars verò AOP, quæ ad alias reſpectu axis AC partes cadit quàm alia portio MN, à puncto A exit, priuſque verſus AC concavam ſe facit, deindè flectitur, & convexa fit, ad aſymptotum KC ſe diſponens; quod debeat eſſe ad talem aſymptotum patet quia cum ly eſt infinita, ut in puncto C, debet eſſe infinita & $ly^{\frac{n}{m}}$ ſive x, quod contrarium flexum habeat patet qua $\frac{n-m}{m}$ ſivè $\frac{n}{m}-1$ exiſtente negativa (cum 1 major ſit quam $\frac{n}{m}$) eſt $\frac{n-m}{m}$ a ſivè ly negativa, & y minor quam a, ergò contrarius flexus pertinet ad curvæ portionem AOP cujus abſciſſæ minores ſunt quam a. Conſideremus ulteriùs caſum quo $\frac{n}{m}$ ſtatuitur poſitivus unitate major cum exiſtant *n*, & *m* impares. Caſum deſignat (*fig.* 20.) figura 20. curva duabus, & illa portionibus componitur utrinquè ab axe conſtitutis, quem ſecat, & tangit in A. Portio AOP eſt ad axem convexa, & ad aſymptotum KC, portio AMN, primò ad eundem axem convexa eſt, deindè concava, cum punctum flexus contrarii habeat. Reliquas curvarum proprietates, ex æquatione erues, has ſolùm attigiſſe juvat, ut appareat quam diverſis figurâ curvis eadem ęquatio competere poſſit. CO-

COROLL. II.

61 SIcutì ex hac propoſitione methodus eruitur pro differentiandis quantitatibus, quas ingrediatur quantitas logarithmica, ità & calculi integralis complures regulę derivari poſſunt, quibus vice verſa quantitates multas, quas logarithmica quantitas ingrediatur, poterimus integrare. In primis enim $\frac{ly^n dy}{y}$ eſt integrabilis, & integrale eſt $\frac{\overline{ly}^{n+1}}{\overline{n+1}\, a}$, poſita a ſubtangente logarithmicæ in qua aſſumuntur ly. Sic & integrabilis eſt $\frac{lydy\sqrt{aa+ly^2}}{y}$, & integrale eſt $\frac{\overline{aa+ly^2}^{\frac{3}{2}}}{3a}$. Uno autèm verbo omnes canones pro integrandis quantitatibus ordinarijs differentialibus quales ſunt, quos tradidimus in pręcedenti ſectione, valent etiàm ſi pro indeterminata, quæ in illis reperitur, pònatur quantitas logarithmica ſimplex ly, vel lx, dummodò quantitas dividatur deindè per y, vel x prout ly vel lx adfuerit in quantitate integranda. Sic quoniàm $\frac{y^{n-1} dy}{\sqrt[m]{a^{2n}+y^{2n}}}$ eſt integrabilis, erit & integrabilis $\frac{ly^{n-1} dy}{y\sqrt[m]{a^{2n}+ly^{2n}}}$, ſubſtituendo ly pro y, & dividendo deindè quantitatem per (nu.45.)

N y;

y; quia, cum y ſit quantitas quævis indeterminata, ſi ejus loco ponatur alia quęvis, & pro dy ponatur deindè hujus alterius differẽtiale, adhùc integrabilitas ſervari debet in quantitate propoſita; igitùr ponendo pro y aliam indeterminatam lx, vel lz, vel etiàm ly, & pro dy deindè differentiale ipſius ly, quod eſt $\frac{dy}{y}$ (poſita brevitatis gratia *l* pro ſubtangente) fiet quantitas adhùc integrabilis, & integrale hujus quantitatis erit idem ac integrale illius, ſubſtituta tantùm ly pro y, undè ſicut integrale ex

(*nu.*49.) $\frac{y^{4n-1}dy}{\sqrt[m]{a^{2n}+y^{2n}}}$ eſt $\frac{\overline{-\frac{m}{m-1}a^{2n}+y^{2n}} : \overline{a^{2n}+y^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}}$ ità integr. ex quantit. $\frac{ly^{4n-1}}{y\sqrt[m]{a^{2n}+ly^{2n}}}$ erit $\frac{\overline{-\frac{m}{m-1}a^{2n}+ly^{2n}} : \overline{a^{2n}+ly^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}}$

ſubſtituta tantùm in priori integrali, loco litteræ y, quantitate ly.

His addenda eſt regula pro integrando $ly^n dy$, vel univerſaliùs $y^m ly^n dy$, quæ ut in progreſſu patebit, eximium habet uſum.

62 Propoſitum eſt igitùr, quoniàm de integrandis quantitatibus logarithmicis ſermo eſt, omnium ſimpliciſsimam $ly^n dy$, vel univerſaliùs $y^m ly^n dy$ inte-

tegrare;ponamus integrale quæſitum eſſe $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$, quale eſſet niſi ly^{n} eſſet quantitas variabilis; vel igitùr $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$ differentiata reſtituet $y^{m}\,ly^{n}\,dy$, vel non; ſi reſtituet, iàm erit illius integrale, & ſatiſfactum erit quæſtioni, aſſignato nempè quæſito integrali. Sed niſi reſtituat, & ejus differentiale prætèr quantitatem $y^{m}\,ly^{n}\,dy$, quid aliud contineat, quod vocetur du, ſignum erit quod aſſumpta quantitas $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$ non eſt integrale ex $y^{m}\,ly^{n}\,dy$, ſed excedit integrale quod quęrimus ex propoſita quantitate $y^{m}\,ly^{n}\,dy$, per totum integrale quantitatis du, quod eſt u. Et profectò differentiando $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$, oritur $y^{m}\,ly^{n}\,dy + \frac{n\,y^{m}\,a.\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$ (poſito a eſſe ſubtangentem logiſticæ) quod excedit propoſitam quantitatem $y^{m}\,ly^{n}\,dy$ per totam quantitatem $\frac{n\,y^{m}\,a\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$, cujus proindè integrale demendum eſt ex quantitate $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$ ut habeatur verum integrale quantitatis $y^{m}\,ly^{n}\,dy$. Ut autèm habeatur quantitatis $\frac{n y^{m}\,a\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$ integrale, quod demendum eſſe mox vidimus ex quantitate $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$

Digitized by Google

ponamus illud eſſe $\frac{ny^{m+1}\, a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ (quale eſſet niſi poteſtas ly^{n-1} eſſet differentiabilis) & ſi reperiamus reverà quantitatem $\frac{ny^{m+1}\, a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ eſſe integrale ex $\frac{ny^{m}\, a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1}$, dememus illam ex quantitate $\frac{y^{m+1}\, ly^{n}}{m+1}$ pro ut faciendum eſſe mox oſtendimus, & reliquum $\frac{y^{m+1}\, a\, ly^{n}}{m+1} - \frac{ny^{m+1}\, a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ erit integrale ex $y^{m}\, ly^{n}\, dy$; at niſi $\frac{ny^{m+1}\, a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ ſit integrale ex $\frac{ny^{m}\, a\, ly^{n-1} dy}{m+1}$, ſed ejus differentiale exceſſerit quantitatem hanc aliqua quantitate du, jàm eſt certum, quod nimis demptum eſt ex $\frac{y^{m+1}\, ly^{n}}{m+1}$ demendo quantitatem $\frac{ny^{m+1}\, a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$, ac proindè addi debere id quod inſupèr ſubtraximus, quod eſt u integrale ex illo exceſſu du quo differētiale quantitatis ſubtractæ $\frac{ny^{m+1}\, a ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ ſuperat quantitatem $\frac{ny^{m}\, a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1}$. Differentiando $\frac{ny^{m+1}\, a ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ pro-

dit

dit $\frac{ny^m a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1} + \frac{n:\overline{n-1}:y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$, quod excedit $\frac{ny^m aly^{n-1}\, dy}{m+1}$ integra quantitate $\frac{n:\overline{n-1}:y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2} = du$, hujus igitùr du integrale (ut oſtendimus) addendum eſt ad $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{ny^{m+1} aly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$, ut habeatur exactum integrale quantitatis propoſitæ ad integrandum $y^m ly^n dy$. Quantitatem porrò du vel $\frac{n:\overline{n-1}:y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$ integraturi, ut ejus integrale quantitati $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n:y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$ addamus, fiat iterùm, ſuppoſitio, quod ejus integrale ſit illud quod ſcimus forè futurum ſi ly^{n-2} non differentiaretur, ponamus nempè integrale ex $\frac{n:\overline{n-1}:y^m aa\, ly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$ eſſe $\frac{n:\overline{n-1}:y^{m+1} aa\, ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$, & ſi reverà fuerit, hoc integrale addendum eſt ad quantitatem $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

— n

$-\frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$, & fiet exactum quantitatis $y^m\, ly^n\, dy$ integrale $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ $+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2\, ly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}}$, ſed niſi fuerit, & differentiale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2\, ly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}}$ exceſſerit quantitatem integrandam $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aa.ly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^{2}}$ quantitate du, debebit iterũ u integr. illius exceſſus demi ex ſerie illa $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} a ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}} + \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}}$ ad habendum verum quantitatis $y^m\, ly^n\, dy$ integrale; experiamur igitùr iterùm an $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2\, ly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}}$ ſit integrale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aa\, ly^{n-2} dy}{\overline{m+1}^{2}}$. Reperio differentiale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}}$ eſſe quantitatem $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aaly^{n-2} dy}{\overline{m+1}^{2}} + \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^m a^3\, ly^{n-3}\, dy}{\overline{m+1}^{3}}$, ac proindè continere $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^m a^3\, ly^{n-3}\, dy}{\overline{m+1}^{3}}$

plùs

plùs juſto, quarè hujus quantitatis integrale erit demendum iterùm ex ſerie ut verum integrale quantitatis $y^m ly^n dy$ habeatur. Si iterùm pro integrali ex $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^m a^3 ly^{n-3} dy}{\overline{m+1}^3}$ ſcribatur $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^{m+1} a^3 ly^{n-3}}{\overline{m+1}^4}$ (pro ut verè eſſet niſi differentialis ex ly^{n-3} habenda eſſet ratio) atquè ſic procedamus in infinitum eàdem lege quam hùc uſque ſervavimus demendo ſcilicèt ex ſerie quantitatem hanc $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^{m+1} a^3 ly^{n-3}}{\overline{m+1}^4}$, quam ponimus legitimum integr. ex $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^m a^3 ly^{n-3} dy}{\overline{m+1}^3}$, deindè addendo integrale exceſſus quo differentiale ex $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^{m+1} a^3 ly^{n-3}}{\overline{m+1}^4}$ ſuperat $\frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^m a^3 ly^{n-3}}{\overline{m+1}^3} dy$, pro quo integrali ſempèr ſupponenda eſt hypotheſis poteſtatem ex ly, quam in quantitate integranda inveniemus, eſſe conſtantem, ſi inquam hoc fiat, reperietur integrale completum ex $y^m ly^n dy$ per ſeriem infinitam exprimi putà $\int y^m ly^n dy = \frac{y^{m+1} ly}{m+1} - \frac{n:y^{m+1} a ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$

$+ n$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1}\, aaly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}} - \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1}\, a^3 ly^{n-3}}{\overline{m+1}^{4}}$$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : \overline{n-3} : y^{m+1}\, a^4 ly^{n-4}}{\overline{m+1}^{5}}$$, & ſic in infinitum eo ordine, quem unuſquiſque facilè percipiet.

63 Addam demonſtrationem ſyntheticam hujus inventi, cum via analytica ſupra expoſita difficilior, & longa nimis videri poſſit. Demonſtrandum eſt igitùr integrale ex quantitate $y^m ly^n dy$ eſſe ſeriem infinitè productam ſuprà inventam; ponatur $z = ly$ & $\frac{ady}{y} = dz$, erit $y^m ly^n dy \equiv y^m z^n dy$;

eſt autèm $y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz$

$- \frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n : \overline{n-1}}{\overline{m+1}^{2}} y^{m+1} z^{n-2} adz$

$+ \frac{n : \overline{n-1}}{\overline{m+1}^{2}} y^m z^{n-2} aady$ &c. in infinitum, quia ſic

omnes termini à primo deſtruuntur ab immediatè ſequentibus, qui ijdem ſunt cum illis proptèr $dz = \frac{ady}{y}$. Sic ſecundus terminus ſeriei, qui eſt

$\frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz$ deſtruitur à tertio termino

$- \frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady$ proptèr $dz = \frac{ady}{y}$, & eodem

mo-

modo quartus deſtruetur à quinto, ſextus à ſeptimo &c. ſuperſtite tantùm primo termino $y^m z^n dy$. Eſt autèm hęc ſeries infinita integrabilis, primus enìm terminus cum ſecundo ſimùl ſumpti integrabiles ſunt, tertius cum quarto, quintus cum ſexto, & ſic omnis terminus in loco impari, cum ſuo immediatè ſequente eſt integrabilis. Facta porrò hac integratione, reperietur integrale hujus ſeriei, ſivè quantitatis $y^m z^n dy$, quę illi æquivalet $\frac{y^{m+1} z^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} z^{n-1} a}{\overline{m+1}^2}$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} z^{n-2} aa}{\overline{m+1}^3} - \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} z^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4} \&c.$$

in infinitum ubi ſi pro z ponas ly, invenies ut ſuprà integrale ex $y^m ly^n dy = \frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} ly^{n-1} aa}{\overline{m+1}^2}$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} ly^{n-2} aa}{\overline{m+1}^3} - \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} ly^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4}$$

&c. quod ad demonſtrandum fuerat aſſumptum.

64 Hinc, ſi *n* fuerit numerus integer poſitivus, patet quantitatem $y^m ly^n dy$ fore integrabilem per ſeriem finitam, hoc eſt ſeriem mòx expoſitam, licet in abſtracto conſiderata, ſivè pro quocumque *n* ſit infinita, tamèn in his caſibus, cum *n* eſt poſitivus integer numerus rationalis ad finitam reduci. Exempli loco ſit $n = 2$; vides in termino quarto ſeriei $-\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} ly^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4}$ adeſſe primò

coeficientem numerum $n-2$ ac prò indè (cum debeat terminus per $n-2$ multiplicari) terminum hunc evaneſcere; ſed & evaneſcent omnes deincèps termini, quia omnes coeficientē habent $n-2$, undè ſeries, ceteroquìn infinita, fit finita, cum $n=2$. Sic & ſi $n=3$, $n=4$ &c. quia in ſeriei progreſſu terminus aderit qui per $n-3$, $n-4$ &c. multiplicandus veniet, & deincèps omnes, poſt illum, qui proindè evaneſcent omnes, ſolis remanentibus ijs qui pręcedunt in Ordine ſeriei, quos quidèm numerò finitos eſſe oportet. Ponamus loco exempli $n=2$, m verò $=1$ ità ut integranda, ſit $y\,ly^{2}dy$. in ſerie pones 2 pro n, 1 pro m, & omnibus terminis ſeriei à tertio abiectis, fiet hoc integrale $\frac{yyly^{2}}{2}-\frac{yyaly}{2}+\frac{yyaa}{4}$ vel $\frac{2yyly^{2}-2ayyly+aayy}{4}$. Si $m=-1$, ſeries hæc inutilis redditur, quia $m+1$ tùnc $=0$, quod terminos ſingulos ſeriei infinitos reddit: ſed tùnc hac

(nu.61.) ſerie non eſt opus cum alibì doceamur tales quantites $\frac{ly^{n}dy}{y}$ nullius ſeriei adminiculo integrare.

(nu. 58. & ſeq.) 65 Patet igitùr quænam ex curvis ſuprà deſcriptis ſpatium huius ſeriei ope quadrabile contineat. Cum enim illarum curvarum ęquatiò ſit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}=x$

$\pm x$, ſivè $\frac{ly^r}{a^{r-1}} = x$ (ponendo r pro $\frac{n}{m}$) erit ſpatij (quod ad axem in quo y aſſumuntur adiacet) elementum $xdy = \frac{ly^r dy}{a^{r-1}}$ quæ quantitas per ſeriem finitam non eſt integrabilis niſi r ſit numerus integer poſitivus. Figurę 12, 13, & 14 non poſſunt habere r numerum integrum, cum ponant $\frac{n}{m}$ fractionem habentem denominatorem parem, & ſi denominator eſt par, (loquor de fractione prima) numerus non eſt integer. Figura 15. habet r negativum, Figura 16. habet poſitivum ſed unitate minorem, ergò non integrum. Figura quidem 17. in qua $\frac{n}{m}$ ſuę æqua- (Fig. 17.) tionis eſt factio numeratorem habens imparem, poteſt eſſe de genere earum curvarum, quę per finitam ſeriem quadrantur. Si enìm denominator ſit 1, erit $\frac{n}{m}$ ſeù r numerus poſitivus integer, debet autèm eſſe par, ex vi Hypoteſis, qua curva OPAMN deſcripta eſt. Ponamus $r = 2$, erit, poſita CD $= y$, DM $= x$, æquatio $\frac{ly^2}{a} = x$ undè $xdy = \frac{ly^2 dy}{a}$. Series ſupra inventa numero pręced. dat integrale ex $\frac{ly^2 dy}{a}$ $= \frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$. Sed quęrendum eſt an aliqua conſtans addenda ſit, vel demenda, ad hoc ut

Digitized by Google

hoc integrale exprimat valorem ſpatij ARMDA, aùt ASP &c.; ſæpè enim addendę ſunt quædam conſtantes integralibus inventis, ut quantitates quęſitę per illa exprimantur. Nùnc quęro an ad hoc ut integrale inventum $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$ exprimat ſpatium ARMDA, aliqua debeat addi, vel demi conſtans. Spatium indeterminatum ARMDA evaneſcit ſivè fit $= 0$ quando $y = a$, & $ly = 0$; ſed tunc inventum integrale, non evaneſcit, ſed fit $= 2aa$, ergò ubique demenda eſt conſtans $2aa$, ut ſpatium ARMDA perfectè exprimatur per illud integrale, eritque hoc ſpatium nō quidem ut traditum eſt $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$ ſed $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay - 2a^3}{a}$.

Eâdem de cauſa ſpatium ASP &c. eſt quantitas, $\frac{-yly^2 + 2ayly - 2aay + 2a^3}{a}$, quæ eſt eadem ac alia ſed mutatis ſignis, quia hìc aucta x, minuitur y, ac proindè differentiale ſpatij ASP &c, eſt $-xdy$ non xdy. Si quęras igitùr ſpatium quod aſymptoto CK, curva ASPO, & ordinata clauditur, pone $y = 0$, & invenies eſſe $= 2aa$, undè & ſi ſpatij hac curva clauſi quadratura generalis non detur algebraicè quia valorem talis ſpatij ingreditur quantitas ly, tamèn ſpatium quod aſymptoto, & curva continetur algebraicè quadratur, & eſt $2aa$. Sìc, ſi r fuiſſet $= 4$, ſpatium CASPO &c. NC fuiſſet $24aa$, & univerſalitèr erit

ſem-

Digitized by Google

ſemper ſpatium illud (quotiès *r* fuerit numerus poſitivus integer par) = caa, poſito c eſſe productum ex omnibus numeris ab unitate uſq; ad *r* incluſivè diſpoſitis, quod nimis longum eſſet explicare, & cōſiderando ſeriē propoſitā ſatis clarum fiet. Figura deindè 18, non poteſt habere $\frac{n}{m}$ ſivè *r* poſitivum, Figura 19. non poteſt habere integrum cum debeat eſſe $\frac{n}{m}$ unitate minor. Figura tandèm 20. habere (*fig.20*) poteſt integrum, & poſitivum, & de curva POAMN quę in illa deſignatur poteſt idē proportionalitèr dici ac de Figura 17. dictum eſt, & ſpatia eius per propoſitam ſeriem quadrati, & inveniri algebraicè ſpatiū aſymptoto & curvis huius figuræ clauſum. Nobis tandèm ad nos redendum eſt, nèc diutiùs extrà propoſitum noſtrum licet divagari.

Exemplum II.

66 DEſcribenda ſit Curva ICDH ſubtangentem BO habens = $\frac{y\sqrt{aa+yy}}{a}$, undè dx (*fig.21.*) = $\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$. Igitùr opus eſt Curvam deſcribere AE, quæ habeat ordinatam ME = $\sqrt{yy+aa}$, ſpatioque CMEAC per a diviſo ponere æqualem ordinatam MD. Curva autèm AE erit hyperbola ęquilatera centrum habens C, axem verò tranſverſum CA = a.

67 Po-

Digitized by Google

67 Poterit hæc conſtructio tentari, & per logarithmicam, quam in exemplo ſuperiore deſcripſimus; ſpatium enim ACMEA eſt æqualę ſpatio ANKE − PKE + CMP + ANC, quarè ad quadrandum ſpatium ACMEA ponemus rectangulum ex $CN = \sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarithmum CK, & deindè addemus ſpatium rectilineum CMP + CNA − PKE, ſummaque diviſa per a dabit quæſitam ordinatam MD.

68 Si velimus hanc conſtructionem moliri per rectificationem curvæ algebraicæ hoc exequemur per regulam ſuprà traditam. (nu. 55.) Nàm quadratum quantitatis $\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$ diviſibile eſt in duo quadrata dy^2, & $\frac{yydy^2}{aa}$, quorum radices dy, & $\frac{ydy}{a}$ ſunt integrabiles, & integralia ſunt y, & $\frac{yy}{2a}$ quapropter deſcribenda eſt curva CF, cujus abſciſſis CM ſivè QF exiſtentibus y, ſint ordinatæ MF vel $CQ = \frac{yy}{2a}$, quę erit parabola cōmunis parametro 2CA, Axe CB, vertice C deſcripta. Igitùr aſsumptâ ordinatâ MD æquali curvæ CF, erit punctum D in optata curva. Et cum ſpatium ANKE ſivè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$: l CK additum quantitati ANC + PMC − EKP faciat

AC-

ACME, hoc eſt faciat rectangulum ex MD in a, ſivè rectangulum ex CF in a erit curva CF, ſivè MD

$$= \frac{ANC + PMC - EKP + \sqrt{\frac{aa}{2}} : l\ CK}{a}, \text{ vel algebr.}$$

$$= \frac{\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \frac{aa}{\sqrt{4yy+2aa-4y\sqrt{yy+aa}}}}{a}, \text{ vel}$$

$$\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}},$$ ſumptis logarithmis in logiſtica cujus NC ſivè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ ſit ſubtangens; uno tandèm verbo, integrale ex $\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$ eſt $\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2a}$ plus rectangulo ex $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarithmum fractionis $\frac{aa}{\sqrt{4yy+2aa-4y\sqrt{yy+aa}}}$ diviſo per a, vel in logarithmum quantitatis $\sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}}$ (idem enim eſt) ſumptis logarithmis habentibus $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ pro ſubtangente.

Exemplum III.

69 Quotieſcumque æquatio ad quam pervenerimus fuerit $dy = \frac{ax^{m-1}\,dx}{a^m + x^m}$ erit integrando

do $y = l\sqrt[m]{a^m + x^m}$ poſita a ſubtangente. Sic ſi fuiſſet $dx = \frac{axxdx}{a^3 + x^3}$ integrando proveniſſet æquatio $y = l\sqrt[3]{a^3 + x^3}$. Poſſet primò intuitu videri aliquid implicans in hoc canone contineri quò $\frac{ax^{m-1}\,dx}{a^m + x^m}$ per logarithmicam integratur, cum tamèn hæc quantitas contineatur in canone univerſaliore quem (nu.47.) ſuprà tradidimus. Ibi enìm notavimus $x^{m-1}\,dx \sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ eſſe in integrabilem, & cum hęc quãtitas, poſito $c = a$, $n = -1$, $b = a$ proveniat $\frac{x^{m-1}\,dx}{a^m + x^m}$, eſt manifeſtum hanc in illa tanquam caſum peculiarem contineri, ac proindè integrabilem èſſe, & illam algebraicè, ſicutì canon ipſe univerſalis, algebraicè integrabilis eſt. Verùm cum integrale ex $x^{m-1}\,dx \sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ notetur ibì eſſe quantitas $\frac{n : \overline{c^{m+1} + bx^m}\,\sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}}{\overline{n+1} : m : b}$, patet hoc integrale fieri infinitam quãtitatem quando $n = -1$, ac proindè tùnc ejus valorem determinari non poſſe, & sìc inutilem reddi hanc regulam, & hac alia nobis utendum eſſe, ſi valorem hujus integralis tùnc determinare velimus. Recurrendum igitùr eſt ad logarithmos & ſcribendum $l\sqrt[m]{a^m + x^m}$ pro integrali canonis $\frac{ax^{m-1}\,dx}{a^m + x^m}$ ſumptis logarithmis in logiſtica

ſub-

ſubtangentem a habente, addita inſupèr, vel dempta arbitraria conſtante b, ſi libuerit. Si etiàm fuerit integranda $\frac{a^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}-x^{2n}}$, erit integrale rectangulum ex $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ ductum in logarithmum quantitatis $\frac{\overline{a^n+x^n}\sqrt{\frac{1}{2}aa}}{a^n-x^n}$ diviſum per *n*, & ſumptum in logiſtica cuius ſit ſubtangens $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ à puncto per quod ipſa ſubtangens eſt ordinata.

Exemplum IV.

70 Sit æquatio conſtruenda $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$; dividetur quadratum partis $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ in duo quadrata dx^2, & $\frac{aadx^2+xxdx^2-2axdx^2}{2ax-xx}$, quorum radices dx, & $\frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ ſunt integrabiles habentq; integralia x, & $\sqrt{2ax-xx}$. Igitùr, deſcripta curva cuius abſciſſa exiſtente x, ſit ordinata $\sqrt{2ax-xx}$ (quæ circulus erit radio a) portio curvæ quæ ad quamvis abſciſſam x pertinet, erit quæſita y. Hac via faciliùs apparet connexio propoſitæ curvę cum cir-

culari quadratura, vel rectificatione, quàm ſi deſcripſiſſemus curvam cuius ordinata ſit $\frac{aa}{\sqrt{2ax-xx}}$, ut docet regula huius ſectionis. Similitèr ſi fuiſſet $dy = \frac{adx\sqrt{aa-xx}}{a}$, curva cuius hęc eſt ęquatio nos deduxiſſet ad circuli quadraturam, quia deſcripta curva cuius abſciſſa ſit x, & ordinata $\sqrt{aa-xx}$ (quę eſt circulus radio a, ſumptis abſciſſis à centro) ſpatium circulare cuivis abſciſſę correſpondens per a diviſum quęſitę curvę ordinatam ſuppeditaſſet Reducitur ad quadraturam circuli etiàm $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$ ſi ſit integranda, quia eius quadratum $\frac{aadx^2}{aa-xx}$, dividitur in partes dx^2, & $\frac{xxdx^2}{aa-xx}$, quarum radices dx, & $-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$ integratæ dant integralia x, & $\sqrt{aa-xx}$. Igitùr curva algebraica, abſciſſam x, & ordinatam habens $\sqrt{aa-xx}$ (quæ circulus eſt ad centrum tamquam initium abſciſſarum relatus) ſi rectificetur dabit integrale ex quantitate $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$.

71 Univerſaliùs $\frac{x^{n-1}dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$ reducitur ad

cir-

cularem quadraturam. Deſcripto enìm circulo radium a habente, à centro extendatur per eius unam diametrum portio quæ ſit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, erit ordinata illi competens ex circuli natura $= \frac{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{n-1}}$, quæ ſi ducatur in datæ abſciſſę $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ differentiale dabit $\frac{n : x^{n-1}dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$, cuius integrale eſt ſpatium correſpondens circulare. Igitùr integrale quęſitũ ex $\frac{x^{n-1}dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$, erit huius ſpatii pars $n^{\text{eſima}}$.

72 Similitèr $\frac{ax^{n-1}dx}{\sqrt{2a^n x^n - x^{2n}}}$ habet pro integrali arcum circularem radio a ductum, & abſciſſam habentem à vertice $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$ ſed tamèn hunc arcum per *n* diviſum, ut facilè erit ſynthetica methodo experiri. Alios canones non abſimiles excogitabis pro internoſcendis quantitatibus quę inter integrandum occurrere poſſunt, vel quę in ęquationibus differentialibus poſsunt inveniri, & quarum integrale, ſivè quæſitarum curvarum deſcriptio, à circuli quadratura dependet. Per has ſuprà allatas regulas

$\frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{aa}$, $\frac{x^2dx\sqrt{a^6-x^6}}{a^4}$ haud aliter etiàm $\frac{xdx}{\sqrt{2a^2x^2-x^4}}$, $\frac{xxdx}{\sqrt{2a^3x^3-x^6}}$, & tales per circularia ſpatia integrantur, & infinitæ aliȩ hujuſmodi, eandem à circuli quadratura ſuſcipiunt dependentiam.

73 Itèm $\frac{a^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$ eſt integrabilis per circulum, eſt enìm eius integrale ſector per *n* diviſus, qui habeat ſui dimidii tangentem ipſi $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ ȩqualem; Si enìm tangens dimidij arcus ſit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ erit ſinus arcus totius $= \frac{2x^n a^{n+1}}{a^{2n}+x^{2n}}$, & eius abſciſsa erit $= \frac{2ax^n}{a^{2n}+x^{2n}}$, quorum ſi fiant differentialia, & differentialium quadrata, & quadratorum ſumma, & ſummȩ radix quadrata, erit illa elementum arcus, quod invenietur eſse $= \frac{2na^{n+1}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, quod elementum in $\frac{a}{2}$ ductum dat elementum ſectoris circularis quȩſitum $= \frac{na^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, undè propoſitum elementum quod eſt huius ſub n^{plum} erit elementum talis ſectoris per *n* diviſi. Quarè iam quotieſcumque integranda

ſit

ſit $\frac{xa^4 dx}{a^4 + x^4}$, vel $\frac{xxa^5 dx}{a^6 + x^6}$, & ſimilia, res erit ad ſectorem circuli radium a habentis, & cuius dimidii tangens ſit $\frac{x^2}{a}$, vel $\frac{x^3}{aa}$, ſed per 2, vel 3 reſpectivè diviſũ. Sic $\frac{a^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{aax + x^3 + 2axx}}$ eſt integrabilis per circulum, hic enim eſt caſus propoſiti canonis ubi $n = \frac{1}{2}$.

Exemplum V.

74 PRo conſtructione curvæ BM ſecantis datam quamvis curvam MV circà fixum punctum in gyrum motam in angulo quovis dato, de qua alibi actum eſt, cum ibi invenerimus, quod poſita AG $= x$, BC $= y$, CD $= r$, radio CG $= a$, ſinu recto dati anguli in radio a, $= b$, & ſinu complementi $= c$, habetur æquatio $dx = \frac{byady + crady}{cyy - byr}$, curva conſtrui poteſt cuius abſciſſæ in axe recto $= y$, ordinatæ verò ſimilitèr rectæ ſint $\frac{aaby + aacr}{cyy - byr}$, datur enim r per y, & a eſt conſtans, b verò & c, vel & ipſæ conſtantes, ſunt (ut in caſu quem hic ponimus, quo angulus cuius ſunt ſinus cõſtans ſit) vel & ipſę (*fig.* 4.) (*nu.* 35.)

dan-

dantur per y, ut ibì etiàm evenire poſſe notavimus. Hac curva deſcripta, ſpatijs quæ illa cum ſuis coordinatis comprehendit per a diviſis, ęquales eſſe debent abſciſſæ x curvæ quęſitę BM, ſivè arcus AG ęquales debent poni rectis illis, quę ſpatia hæc per a diviſa exæquaverint. Verùm & ſi deſcriberemus ad circulum AG tanquam axem lineam, aſſumendo arcus à puncto A $= y$, & ordinatas correſpondentes à centro uſque ad curvam $= a\sqrt{\frac{2bay + 2car}{cyy - byr}}$ poſſemus etiàm ſpatijs quæ intèr centrum, & talem curvam, duaſq; ordinatas quaſvis clauduntur per a diviſis ponere æqualem abſciſſam AG, cui ordinata correſpondeat $= y$, ſic enim punctum reperietur in optata curva BM, quia ſi adſit curva ad axem circularem AG, cuius abſciſſa in hoc axe exiſtente y, ordinata a centro ſit $a\sqrt{\frac{2bay + 2acr}{cyy - byr}}$, erit elementum ſpatij intèr hanc curvam, & centrum, per quávis ordinatam à centro abſciſſi & per a diviſi $= \frac{byady + crady}{cyy - byr} = dx$. igitùr x quæſitæ curvæ æqualis eſt huic ſpatio per a, ut ſuprà dictum eſt, diviſo. Addidimus hanc conſtructionē per quadraturā curvæ ad axem circularem relatę, quòd videatur naturæ problematis magis congrua, cum hìc de lineis agamus ad tales axes conſtitutis. Utraque tamèn harum conſtructionum pro legitima eſt reputanda.

SE-

SECTIO QUARTA.

De conſtructione æquationum differentialium primi gradus, quando conſtet non eſſe algebraicè integrabiles, & pratèr utriuſque indeterminatæ differentialia ad quamvis poteſtatem elevata, continent alterutram tantùm indeterminatarum.

PROPOSITIO PRIMA.

75 AEquatio differentialis primi gradus ad quam pervenitur pro quęſita aliqua linea eſt interdùm talis ut differentialia utriuſq; indeterminatæ ad poteſtatem quamvis elevata habeat unicam tantùm indeterminatam cæteroquìn continens; tùncque, ſi loco differētialis indeterminatę illius, quæ ęquationem non ingreditur, ſubſtituatur $\frac{zdt}{a}$, hoc eſt indeterminata quędam z per conſtantem diviſa, & in differentiale dt alterius indeterminatæ, quę æquationem inventam ingreditur multiplicata, habebimus æquationem alicuius curvæ, cuius ſpatia quæ ſunt ad abſciſſas t per a diviſa erunt ordinatis quæſitę Lineæ æqualia eaſdem abſciſſas t habentibus.

76

76 Nàm, poſito indeterminatam, quæ æquationem non ingreditur eſſe u, adeſſe autèm tantùm du, t verò ut ſuprà dictum eſt eſſe aliam, cuius non ſolum differentiale in ęquatione apparet, ſed & prętereà ipſa extrà differentiale ſignum in illa reperitur, cum loco du iſte valor $\frac{zdt}{a}$ ſit ubiq; ſubſtituendus, & loco du^2 ſubſtituendum ſit $\frac{zzdt^2}{a^2}$, & $\frac{z^3dt^3}{a^3}$ loco du^3, & ſic de cæteris ipſius du poteſtatibus, eſt clarum in unoquovis membro ęquationis poſt ſubſtitutionem tot ipſius dt dimenſiones eſſe adfuturas, quot priùs aderant differentialis du poteſtates, additis inſupèr dimenſionibus, quas in quovis termino eadem dt antè ſubſtitutionem habuerat. Et cum in quavis æquatione, du, & dt ſimùl ſumptæ æqualem in om-
(nu. 4.) ni membro dimenſionum numerum habeant, ſequetur quod in hac etiàm æquatione, ſubſtitutione peracta, dt ubique eandem dimenſionem obtinebit, undè diviſibilis erit æquatio per illam ipſius dt dimenſionem, & ſic omnia differentialia omninò tollentur ex æquatione, quę algebraica fiet, & relationem indeterminatarum t, z determinans curvam aliquam algebraicam indigitabit. Deſcripta porrò hac curva, cum debeat eſſe $du = \frac{zdt}{a}$, debebimus ſpatijs quæ illa claudit cum axe, & coordinatis (cum axe inquàm in quo t aſſumuntur) per a diviſis ęqua-

les

les ponere lineas u, quæ erunt ordinatæ curvæ conſtruendæ, ad abſciſſas t pertinentes. Eſt enim zdt hujus ſpatij, $\frac{zdt}{a}$ verò eiuſdem per a diviſi elemētum, quod elementum du ordinatę u (quę ad abſciſſam t in quęſita curva pertinet ex Hypoteſi) debet æquare, undè ſi elementa ſunt continuò invicèm æqualia, æqualia erunt & integralia elementorum.

COROLL.

77. zdt non ſolùm eſt elementum ſpatij quod claudit axis, ordinata z, & Curva cuius abſciſſa ſit t, & z applicata, ſed eſt etiàm elementum ſpatij illius conſtante quovis ſpatio aucti. Itaquè u, ſivè quęſita ordinata non æqualis tantùm cenſenda eſt ſpatio quod ſuperiùs determinavimus, & curvâ duabuſque coordinatis circumſcripſimus, per a diviſo, ſed addito etiàm quovis conſtanti ſpatio per a diviſo, ſivè quavis conſtante recta, erit adhùc ordinata quæſitę curvæ; additio hęc conſtantis curvam poſitione tantùm, non natura, variare potis eſt. Facilè per datum punctum duci poterit curva quæcumq; per hoc æquationum genus expreſſa, quod cum nullâ poſſit impediri difficultate, ulteriùs explicare negligimus.

Exemplum.

78 SI relatio intèr quatuor lineas tangentem, ſubtangentem, normalem, & ſubnormalem quęſitæ lineæ, ſivè t, s, n, r, æquatione quavis exprimatur nullam conſtantem continente, ità ut in omni æquationis huius termino dimenſiones literarum t, s, n, r ſimùl ſumptæ eundem numerum efficiant, tùnc æquatio erit per unam eandemque ordinatæ y dimenſionem diviſibilis, evaneſcente ſic omninò y ex æquatione; eſt enìm $t = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$,

(nu. 5.) $s = \frac{ydx}{dy}$, $n = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $r = \frac{ydy}{dx}$, undè harum Linearum unaquævis per eandem ordinatæ y (primam nempè) poteſtatem afficitur, quarè ſi ex his quatuor Lineis ad quamcumque poteſtatem elevatis fiat quodcumque productum, tot erunt in producto dimenſiones indeterminatæ y, quot fuerint omnes dimēſiones producti, ut in producto $t^3 s^5 n rr$ aderunt undecim dimenſiones lineæ y, quia undecim dimenſionum eſt productum; æquatio autèm, quæ ipſarum t, r &c. relationem continet, debet ubiquè eundem dimenſionum numerum ſortiri, & ſolis t, r &c. conſtare, quia nullam conſtantem admittere debet, quarè diviſibilis erit per tantam ipſius y poteſtatem quantus erit hic dimenſionum numerus, ut ſi æquatio foret $s^3 - t^3 = rrn - n^3$, æquatio di-

diviſibilis eſſet per y^3, & ſic de ſingulis. Per hanc porrò diviſionem tolleretur omninò y ex æquatione, & ſolę dy, dx ſuperſtites erunt. Applicemus regulā, & ponamus quod $sr - rn = ts$, ſivè $yydx^2dy^2$ ſit $= \overline{yydx^3 + yydy^3}\sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$; Iàm æquatio diviſibilis eſt per yy, nec poſt diviſionem reliquum eſt quidcquam in æquatione prætèr dx, & dy, nàm æquatio à ſignis radicalibus liberata eſt $dx^8 + dx^6\,dy^2 + 2dx^5\,dy^3 - dx^4\,dy^4 + 2dx^3\,dy^5 + dy^6dx^2 + dy^8 = 0$ ſubſtituenda eſt iàm $\frac{zdy}{a}$ in locum dx, undè æquatio $z^8 + z^6aa + 2z^5a^3 - z^4a^4 + 2z^3a^5 + zza^6 + a^8 = 0$ Patet autèm hanc ęquationē nō eſſe ad lineam quamdā, ſed ad punctū, vel puncta numero finita, hoc eſt z eſt conſtans, non verò variabilis, quia ex hac æquatione patet z dari per conſtantem a. Cum igitùr z ſit quædam conſtans, & ſit $dx = \frac{zdy}{a}$ & proinde $dx, dy :: z, a$, erit dx ad dy in ratione conſtante; igitùr recta eſt linea quæſita, & talis ut cum axe angulum contineat, cuius ſinus complementi ad ſinum rectum ſit ut a ad z radicem mox inventæ æquationis. Quarè patet quomodò ſit inſtituenda conſtructio, & duci debeat quæſita linea. (nn. 75)

COROLL.

79 SImilitèr quotiès æquatio inventa pro conſtruenda linea ſolis dx, & dy conſtiterit, oſtendetur lineam ipſam rectam fore, cum axe dato, atque ad punctum in illo datum vel aſſumptum angulum conſtituens, cuius ſinus complementi ad ſinum ſit ut a recta quædam ad arbitrium aſſumpta ad z radicem ęquationis inventæ per ſubſtitutionem quantitatis $\frac{zdy}{a}$ loco dx. Quæ ſubſtitutio in his caſibus breviùs ſupplebitur ſi pro dx ubique ponamus z, & pro dy ponamus a, cum z, & a ipſis dx, dy proportionales exiſtant, vi hypotheſis $dx = \frac{zdy}{a}$

Exemplum II.

80 CUrva ponatur conſtruenda, cuius abſciſſę poteſtas quævis data, ſit æqualis cuivis poteſtati ipſius curvæ, ſivè cuius æquaẟio ſit $t^m = \frac{x^n}{a^{n-m}}$, & proindè $t = \frac{x^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ undè $dt = \frac{\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx}{a^{\frac{n-m}{m}}}$, & pro dt ponendo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ erit quadrando deindè & reducendo ęquationem ad eundem denominatorem $a^{\frac{2n-2m}{m}} dx^2 + a^{\frac{2n-2m}{m}} dy^2 = \frac{nn}{mm} x^{\frac{2n-2m}{m}} dx^2$. Sivè in hac ęqua-

Digitized by Google

æquatione ſubſtituamus $\frac{zdx}{a}$ loco dy iuxtà regulam traditam, ſivè ſeperando dy eius valorem eruamus $= dx \frac{\sqrt{\frac{nn}{mm} x^{\frac{2n-2m}{m}} - a^{\frac{2n-2m}{m}}}}{a^{\frac{2n-2m}{m}}}$, in idem recidet conſtructio, in quadraturam ſcilicèt ſpatii cuius æquatio ſit $z = a \frac{\sqrt{\frac{nn}{mm} x^{\frac{2n-2m}{m}} - a^{\frac{2n-2m}{m}}}}{a^{\frac{2n-2m}{m}}}$

Quando ſpatia hæc fuerint algebraicæ quadraturæ capacia tùnc curva quęſita erit & ipſa algebraica. ſecùs erit tantùm tranſcendens.

Exemplum III.

81 PRoponatur deſcribenda ad axem AB curva CG, dato puncto fixo extrà axem D, talis ut ducta quavis tangente CE, & ordinata CB per punctum contactus, & per D ipſi CE parallela DF, ſit ubique $c AD^n AF^m, \overline{DF}^{n+m} :: \overline{DF}^r, \overline{BC}^r$, poſito c eſſe numerum quemvis datum conſtantem. Ponatur $AD = a$, $AB = x$, $BC = y$, invenienturque $AF = \frac{adx}{dy}$, & $DF = \frac{a\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$, & debet eſſe analogia $\frac{c : a^{n+m} dx^m}{dy^m}, \frac{a^{n+m} : \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{m+n}{2}}}{dy^{n+m}} :: \frac{}{a^r}$ (fig. 22.)

$\frac{a^r : \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{r}{2}}}{dy^r}$, y^r; undè æquatio $cy^r\, dx^m dy^{n+r}$ $= a^r\, \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{m+n+r}{2}}$, undè quadrando invenietur $c^2\, y^{2r}\, dx^{2m}\, dy^{2n+2r} = a^{2r}\, \overline{dx^2 + dy^2}^{m+n+r}$, & extracta radice cuius index ſit $m + n + r$ erit æquatio $c^{\frac{2}{m+n+r}}\, y^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dx^{\frac{2m}{m+n+r}}\, dy^{\frac{2n+2r}{m+n+r}} = a^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dx^2 + a^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dy^2$: Ponamus iàm $\frac{zdy}{a}$ loco dx, & quævis poteſtas illius loco homologę poteſtatis huius, & peracta ſubſtitutione, & diviſo ubique per dy^2 & reducta æquatione ad eandem denominationem fiet $c^{\frac{2}{m+n+r}}\, z^{\frac{2m}{m+n+r}}\, y^{\frac{2r}{m+n+r}} = a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz$; undè $y^{\frac{2r}{m+n+r}} = \frac{a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz}{c^{\frac{2}{m+n+r}}\, z^{\frac{2m}{m+n+r}}}$, & tandèm extracta radice indicem habente $\frac{2r}{m+n+r}$, erit y $= \overline{\frac{a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz}{c^{\frac{2}{r}}\, z^{\frac{2m}{r}}}}^{\frac{m+n+r}{2r}}$ æquatio curvę conſtruen-

ſtruendæ, qua conſtructa ſpatijs, quæ adiacent abſciſſis per a diviſis æquales ponantur rectè lineę, hę erunt ordinatę x pertinentes ad abſciſſas y in curva quęſita.

COROLL.

82 MVltotiès evenit curvam hanc quadratricem quęſitę curvę (hoc eſt cuius ſpatiorum quadratura manifeſtat ordinatas curvæ quæſitæ) eſſe algebraicè quadrabilem, tuncque quæſita curva erit etiàm algebraica, quia quæſitę curvę ordinatæ ſunt ſpatijs huius, quam quadratricem voco proportionales. Ut autèm clariùs diſtinguamus quoſdam caſus in quibus curva hæc quadratrix eſt algebraicè quadrabilis vocemus $a^{\frac{2r+2m}{m+r+n}} = b$, & $a^{\frac{-2n}{m+r+n}} = e$; eritque proindè æquatio curvæ quadratricis $y = \frac{\overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{2}{r}} z^{\frac{m}{r}}}$. Quotieſcumque autèm integrabilis fuerit $dz : \frac{\overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{2}{r}} z^{\frac{m}{r}}}$ ſivè ydz, erit & integrabilis zdy, quia $\int zdy + \int ydz = yz$, ac proindè

dè $\int zdy = yz - \int ydz$. Cum autèm $\int \frac{zdy}{a}$ ſit ordinata curvæ quæſitæ, ſequetur hanc ordinatam fore algebraicam quotiès $\frac{dz : \overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$ fuerit integrabilis.

83 Et primò quidèm, ſi numerus qui denotatur per $\frac{m + n + r}{2r}$ fuerit integer, & poſitivus, clarũ eſt, quantitatem $b + ezz$ elevandam fore ad aliquam poſitivam integram poteſtatem, quæ quidèm (quęcumque ſit illa) non poſſet non integrabilem efficere quantitatem $\frac{dz : \overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$ niſi obſtaret $z^{\frac{m}{r}}$ poſita in denominatore. Niſi enìm adeſſet omninò z in denominatore ſatìs darum eſt quamvis integram poſitivamque quantitatis $b + ezz$ poteſtatem in dz ductam, integrabile quid effecturam, quia ſi debeat $b + ezz$ elevari exempli loco ad tertiam poteſtatem, habebit z in uno membro nullam, in alio duas, in tertio quatuor in alio demũ ſex dimenſiones, quæ omnia igitùr membra in dz, ducta facient integrabiles quantitates. Et univerſaliùs, ad quamvis poteſtatem integram poſitivamque èlevanda ſit $b + ezz$, in uno ſemper membrorum nullam, in

ſe-

Digitized by Google

ſecundo duas, in tertio quatuor, in quarto ſex dimenſiones eſt habitura, quòuſque maxima ipſius z dimenſio ſit exponentis $\frac{m+n+r}{2r}$ dupla, vel ſit $=\frac{m+n+r}{r}$, & nullibì ad poteſtatem imparem poterit elevari, ſed omnis quidèm numerus par qui maior non ſit quàm $\frac{m+n+r}{r}$ erit exponens literę z in aliquo membro. Verùm cum denominator ducatur in ipſius z poteſtatem $\frac{m}{r}$ debebit hæc poteſtas ſubtrahi, ex omni numeratoris membro, quod ſanè integrabilitatem non poteſt tollere, niſi alicubì exponens poteſtatis reliquę ipſius z ſit $=-1$. Ex quavis nempè poteſtate, quam habeat z in quocumque membro cuiuſvis poteſtatis integræ, & poſitivæ $\frac{m+n+r}{2r}$ ad quam b+ezz elevetur, tollendo poteſtatem $\frac{m}{r}$, reliquum eſt alia ipſius z poteſtas, quæ proinde in dz ducta erit adhùc integrabilis ut priùs, dummodò hæc poteſtas nullibì ſit -1, quo in caſu integrabilem non eſſe alibì oſtenſum eſt. (nu.41.) Si igitùr, exiſtente ſemper $\frac{m+n+r}{2r}$ poſitivo, & integro, fuerit $\frac{m}{r}$ negativus (vel integer vel factus nihil inter eſt) debebit poteſtatibus quas habet z in nu-

meratore, non demi quidèm, ſed addi aliquid poſitivum. Sed addendo aliquid cuivis numero poſitivo aùt etiàm addendo aliquid ad nihil, nunquàm poteſt provenire negativus numerus -1; quarè in hoc caſu nunquàm poterimus incidere in membra non admittentia integrationem algebraicam. Pronunciemus igitùr quod quotiès, exiſtente $\frac{m+n+r}{2r}$ poſitivo integro, $\frac{m}{r}$ ſimùl fuerit quomodocumquè negativus, curva quadratrix erit quadrabilis, & curva quæſita conſequentèr algebraica. Exemplum eſto $r=2$, $m=-2$, $n=4$, quo in caſu ſi ponatur $c=1$ erit $b+ezz$ (reſtitutis pro b, & e eorum valoribus) $=\frac{aa+zz}{aa}$, & applicando debitè valores exponentium m, n, r, erit æquatio curvæ quadratricis, po-
(fig. 23.) ſitis $HI=z$, $IK=y$, $y=\frac{aaz+z^3}{aa}$. Undè $ydz=\frac{aazdz+z^3dz}{aa}$, & ſpatium HIK quod adiacet axi ſupèr quem aſſumuntur z erit integrando $\frac{2aazz+z^4}{4aa}$, quod cum evaneſcat evaneſcente, z nihil conſtans addi debet ad exprimendum ſpatium HIK. Cum autem opus habeamus ſpatii HLK, quod eſt $\int zdy$, inveniemus illud demendo ex yz, ſivè ex quátitate

aa-

$\frac{aazz + z^4}{aa}$ mox inventum ſpatium HIK $\frac{2aazz + z^4}{4aa}$, & reliquum erit $\int zdy$, vel HKL $= \frac{2aazz + 3z^4}{4aa}$, undè $\int \frac{zdy}{2}$ ſivè quæſita $x = \frac{2aazz + 3z^4}{4a^3}$. Curva igitùr quęſita eſt talis ut, eius abſciſſa exiſtente y ſivè $\frac{aaz + z^3}{aa}$, ordinata x ſit $\frac{2aazz + z^4}{4a^3}$.

84 Sed etiàm ſi $\frac{m}{r}$ ſit poſitivus, modò ſit fractus numerus, poterimus certiores eſſe curvam quęſitam algebraicam futuram in hypotheſi ſemper quod $\frac{m + n + r}{2r}$ ſit integer, & poſitivus; quia nempè numerus fractus ab integris demptus (quales ſunt omnes exponentes poteſtatum litteræ z in numeratore in hoc caſu, quo $\frac{m + n + r}{2r}$ eſt poſitivus integer) numqam integrum $- 1$ poteſt relinquere, loquor de fractis irreducibilibus. Undè ſi fuerit $m = 1$, $n = 1$, $r = 2$, erit, poſito $c = 1$, æquatio quadratricis LMK, poſitis HO $= z$, OL $= y$, (*fig.*24.) $y = \frac{aa + zz}{\sqrt{az}}$, undè $ydz = \frac{aadz + zzdz}{\sqrt{az}}$ ſivè etiàm $= \frac{aaz^{-\frac{1}{2}}dz + z^{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{a}}$, undè integrando erit $\int ydz$

 10-

$= \frac{10aaz + zz^3}{5\sqrt{az}}$ æquale ſpatio ordinatâ quavis OL, ſuâ abſciſsâ OH, curvâ, & aſymptoto HR circumſcripto, quod cum evaneſcat evaneſcende z prorsùs ut debet, ſignum eſt, huic integrali $\frac{10aaz + zz^3}{5\sqrt{az}}$ nullam conſtantem eſſe addendam ut exprimatur ſpatium illud. Habito ſpatio ad axem OH, ad obtinenda ſpatia ad alium axem, quæ ſunt horum complementa, & quorum indigemus, aſſumatur HP $= \sqrt{\frac{\;}{3}}$, ductaq; ordinata PM, quę erit $\frac{4a}{\sqrt{\sqrt{\frac{\;}{27}}}}$ eritque omnium ordinatarum minima, invenietur ſpatium abſciſsâ PH, ordinatá PM, curvâ, & aſymptoto HR clauſum $= \frac{32}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ rectangulum autèm MNHP erit $4aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, ergò eorum differentia, ſpatium infinitè longum quod ordinatâ MN, curvâ, & aſymptoto NR definitur erit $\frac{12}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Si igitùr z eſt major quàm $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ dempto ſpatio infinitè longo RNMKR, quod eſt $\frac{12}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ ex indeterminato ſpatio RHOLMKR quod eſt $\frac{10aaz + zz^3}{5\sqrt{az}}$, reliquum erit ſpatium

NH-

NHOLMN, quod eſt igitùr $\pm \frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}} - \frac{12}{5}a^2 \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quod ſpatium demptum ex yz rectangulo QLOH, quod eſt $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$ reliquum facit quæſitum ſpatium NMLQ $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}} + \frac{12}{5}aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quod per a diviſum dabit, in caſu, quo z major ſit quàm $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, quæſitam ordinatam curvæ, quam quærebamus $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5}a \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Eodem prorsùs modo ſi z ſit minor quam $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ ut HS, ex ſpatio infinitè lõgo RHSKR, quod eſt etiàm hìc $\frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$ opus eſt demere rectangulum yz ſivè QHSK ſivè $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$, & reliquum erit ſpatium infinitæ longitudinis RQKR $= \frac{5aaz - 3z^3}{5\sqrt{az}}$, & tùnc, dempto hoc ſpatio ex ſpatio conſtante infinitè longo RNMKR, quod ex viſis eſt $\frac{12}{5}aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, erit reliquum quęſitum ſpatium

QN-

Digitized by Google

QNMK $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}} + \frac{12}{5}\, aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quo diviſo per a, erit ordinata quęſitæ curvæ etiàm cum fuerit z minor quam $\sqrt{\frac{aa}{5}}$, æqualis $\frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5} a \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Cum verò omni y duplex competat z, una major, altera minor quàm $\sqrt{\frac{aa}{5}}$ (modò non ſit y minor quàm PM ſive quàm $4a \sqrt{\sqrt{\frac{1}{27}}}$, ſecùs nulla realis z illi competere poteſt) hinc eſt quod, aſſumpta ad libitum y ſivè HQ abſciſſa quęſitæ curvæ, duplex in ipſa quęſita curva illi competet ordinata, altera quidèm $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5} a \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ (poſita QL pro z) altera porrò erit ejuſdem valoris, ſed poſita KQ pro z.

85 Adſunt etiàm caſus quibus, exiſtente $\frac{m+n+r}{2r}$ integro poſitivo, & ſimùl $\frac{m}{r}$ poſitivo, & integro, adhùc curva quadratrix quęſitę lineę algebraicè poteſt eſſe quadrabilis. Si enim $\frac{m}{r}$ ſit poſitivus integer

ſed

ſed par, erit illa quadrabilis, quia cum in poteſtate $\frac{m+n+r}{2r}$ integra, & poſitiva quantitatis $b+ezz$ non poſſit, ex prænotatis z habere niſi pares dimẽſionum numeros, ſi ex ſingulis harum dimenſionum exponentibus paribus, par numerus $\frac{m}{r}$ demi debeat, nunquam poterit remanere impar -1 pro exponente reliquæ poteſtatis ipſius z. Itaquè exiſtente $r=1$, $n=1$, $m=2$, & $c=1$, curva quadratrix quęſitę lineę, quę per ęquationẽ $y=\frac{a^4+2aazz+z^4}{azz}$, & per KML repręſentatur erit àlgebraicè quadrabilis. Integrale enìm ex $\frac{a^4dz+2aazzdz+z^4dz}{azz}$ ſivè $\int ydz$ eſt $=\frac{6aazz+z^4-3a^4}{3az}$, quæ quidèm quantitas, cum fiat infinitæ magnitudinis in caſu quo $z=0$, ſequetur infinitam magnitudinem conſtantem addendam eſſe huic integrali, ut habeatur ſpatium, quod aſymptoto HR, axe, ordinata quavis LO, & curva clauditur. Satiùs igitùr erit pro $\int ydz$ non ſpatia infinitè longa RHOLMK &c. interpræatari, ſed alia ſpatia, quæ ordinatis, axe, curvâ, & ordinatâ conſtante quavis terminantur, ut LOPM, aſſumpta PM pro ordinata conſtante, quæ (brevitatis gratia) ſit omnium minima, cujus quidèm (fig. 25.)

dèm abſciſſa HP in hac curva eſt $= a$, & ipſa ordinata eſt $= 4a$. Poſito igitùr $\int ydz$ ſpazia OLMP deſignare, debebit ab integrali $\frac{6aazz + z^4 - 3a^4}{3az}$ tolli $\frac{4aa}{3}$ ad hoc ut z exiſtente $= a$ evaneſcat illud, ut debet reverà evaneſcere. Sicque dicemus eſſe $\int ydz = \text{LOMP}\ \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 - 4a^3 z}{3az}$. Sed rectangulum PMNH eſt $= 4aa$, quod additum ad mox inventum ſpatium faciet aream NHOLMN $= \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 + 8a^3 z}{3az}$, qua dempta ex rectangulo QLOH quod eſt $\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{az}$, reliquum eſt quęſitum ſpatium MNQLM $= \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3 z}{3az}$, quo per a diviſo, erit quotiens $x = \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3 z}{3aaz}$, & cum duplex z hìc quoque competat unicuivis y, duplex erit etiàm ipſius x valor mox inventus.

86 Sed etiàm ſi exiſtente $\frac{n + m + r}{2r}$ numero integro, & poſitivo, ſit $\frac{m}{r}$ numerus poſitivus integer impar, modò ſit major quàm $\frac{n + m + 2r}{r}$, ſemper

cur-

curva quadratrix claudet ſpatia algebraicè quadrabilia, ac proindè quæſita curva erit algebraica; quia enìm in poteſtate integra, & poſitiva $\frac{n+m+r}{2r}$ quantitatis $b+ezz$, indeterminata z nullam poteſtatem habere poteſt majorem quàm $\frac{n+m+r}{r}$, immò omnis exponens indeterminatæ z in quovis membro hujus poteſtatis, niſi ſit $\frac{n+m+r}{r}$, erit ſaltèm binario minor quàm $\frac{m+n+r}{r}$; hinc ſi ab uno quovis horum exponētium debeat ſubtrahi $\frac{m}{r}$ major quàm $\frac{m+n+r}{r}$ (utpotè major quàm $\frac{m+n+2r}{r}$) reliquum erit quidèm ſemper quid negativum, ſed nunquàm erit -1, excepto ſolùm caſu quo $\frac{m}{r}$ eſſet unitate tantùm major quàm $\frac{n+m+r}{r}$ hoc eſt eſſet $\frac{n+m+2r}{r}$, tùnc enìm hic exponens demptus à maximo exponente $\frac{n+m+r}{r}$ relinqueret -1. Vndè ſi $\frac{m}{r}$ ſit etiàm major quàm $\frac{n+m+2r}{r}$ nunquàm poterit haberi -1 pro exponente indeterminatæ z

in ullo terminorum, etiàm ſi $\frac{m}{r}$ ſit numerus impar.

Eſto exemplum $m=7$, $n=-4$, & $r=1$, c verò $=1$, quo in caſu ęquatio curvæ quadratricis invenietur (fig. 26.) $\frac{a^8+a^4z^4+2a^6zz}{z^7}$, quæ repræſentatur per MK, poſitis HS $=z$, SK $=y$; ſpatium $\int ydz$, quod aſymptotus HN, curva, axis, & quævis ordinata claudunt eſt $\frac{-a^8-3a^6zz-3a^4z^4}{6z^6}$, undè infinitum eſt ſi $z=0$. Ducamus igitùr ordinatam quamvis MP, ſitq; brevitatis gratia ordinata MP, quæ pertinet ad abſciſsâ PH $=a$, ità ut PM $=4a$. Sumanturque ab ordinata PM deincèps ſpatia, quę per $\int ydz$ denotantur. Si ergò velimus, quod, z exiſtente a, ſint hæc ſpatia $=0$, debebit addi conſtans $\frac{7}{6}aa$, & erunt $\int ydz$, ſpatia PSKM $=\frac{7aaz^6-a^8-3a^6zz-3a^4z^4}{6z^6}$. Undè facilè innoteſcit, ſpatium quod curvâ, aſymptoto HN, coordinatiſque MP, PH eſt clauſum, eſſe infinitum, cum quantitas mòx inventa, quæ ſpatiorum menſuram exhibet fiat infinita cum z eſt $=0$, ſpatium verò aſymptoto altera PL, curvâ, & ordinatâ PM circumſcriptum, eſſe $=\frac{7}{6}aa$, quia, poſita z infinita, omnes termini a^8, $3a^6zz$, $3a^4z^4$ evaneſcunt, cum re-

reliquo $7aaz^6$ ſint infinitè minores, ſicque ſupereſt ſolus $\frac{7aaz^6}{6z^6}$, ſivè $\frac{7aa}{6}$ pro ſpatii huius menſura. Invento igitùr ſpatio MPSK, dematur hoc ex ſpatio infinitè longo MPLM, quod ex viſis eſt $= \frac{7}{6}aa$, & reliquum erit ſpatium infinitè longum KSLK $= \frac{a^8 + 3a^6zz + 3a^4z^4}{6z^6}$, quod additum ad yz rectangulum HSKQ quod eſt $= \frac{a^8 + 2a^6zz + z^4a^4}{z^6}$, ſummam facit ſpatium infinitè longum HQKLH $= \frac{7a^8 + 15a^6zz + 9a^4z^4}{6z^6}$, $\int zdy$; quarè ordinata demùm curvæ quęſitę x eſt $= \frac{7a^7 + 15a^5zz + 9a^3z^4}{6z^6}$, exiſtente $y = \frac{a^8 + 2a^6zz + a^4z^4}{z^7}$.

87 Quotiès tandèm, exiſtente $\frac{m + n + r}{2r}$ poſitivo, & integro, fuerit $\frac{m}{r}$ integer poſitivus impar, ſed non major quàm $\frac{m + n + 2r}{r}$, curva quadratrix non erit algebraicè quadrabilis, ſed tantùm opè Logarithmicæ. Quoniàm enim $\frac{m}{r}$ eſt numerus impar, aſſumatur par proximè minor, qui

unitate tantùm differet à numero $\frac{m}{r}$, hic erit neceſſariò exponens literæ z in aliquo termino numeratoris, quia cum $\frac{m}{r}$ non ſit maior ex Hypoteſi quam $\frac{m+n+2r}{r}$, neque $\frac{m}{r}-1$ (numerus par proximè minor impare $\frac{m}{r}$) erit ideò maior quàm $\frac{m+n+2r-1}{r}$ ſivè $\frac{m+n+r}{r}$; ſed omnis numerus par non maior quàm $\frac{m+n+r}{r}$ eſt exponens literæ z in aliquo termino quantitatis $b+ezz$ quæ elevatur ad integram poſitivamque poteſtatem $\frac{m+n+r}{2r}$, igitùr erit neceſſarium inveniri in numeratore aliquem terminū, in quo exponens literę z ſit $\frac{m}{r}-1$, ex quo demendo poſteà $\frac{m}{r}$ exponentem literę z in numeratore, reliquum erit -1 exponens literæ z, undè ad Hyperbolæ quadraturam erimus deducti; res erit clarior exemplis; ponamus $n=2$, $m=1$, $r=1$, c verò $=4$, tùnc ęquatio ad curvam, quam nùnc vocamus quadratricem erit $y=$
(fig.57.) $\frac{a^4+z^4+2aazz}{4aaz}$, quam deſignat LMK habentem abſciſſas z in axe HO, & ordinatas y in axe HR; ad quadranda porrò ſpatia huius curvę, ſivè ad inte-

tegrandam quantitatem $\frac{a^4dz + 2aazzdz + z^4dz}{4aaz}$, ſi dividamus illam in partes $\frac{aadz}{4z} + \frac{zdz}{2} + \frac{z^3dz}{4aa}$, inveniemus integrale $\frac{zz}{4} + \frac{z^4}{16aa} + \frac{alz}{4}$, ſumptis logarithmis in logarithmica habente a pro ſubtangente, à quocumque poſteà puncto eius aſymptoti incipiant. Verùm poſito $z = o$ ſpatium hoc infinitum eſt, quia tunc lz eſt infinita, ut igitùr in quantitatibus aſſignabilibus verſemur, aſſumemus ſpatia $\int ydz$ ab ordinata minima MP, quę ad abſciſſam PH ſpectat æqualem $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, eſtque ipſa $MP = \frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$. Subſtituto igitùr $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ pro z in valore ſpatii mox invento, erit tùnc ſpatium $RHPMKR = \frac{aa}{144} + \frac{aa}{12} + \frac{a\, l\sqrt{\frac{aa}{3}}}{4}$, quod quidèm ut fiat $= o$, poterimus facere $l\sqrt{\frac{aa}{3}} = o$, ſivè ſumere logarithmos in logiſtica cujus a ſit ſubtangens, à puncto per quod ordinatur linea $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, & deindè debemus inſupèr demere conſtantem $\frac{13aa}{144}$, ſicque ſpatium quod interjacet

or-

ordinatâ conſtantem MP omnium minimam, curvam LM, ordinatam quamvis LO, & axem erit $= \frac{z^4}{16aa} + \frac{zz}{4} - \frac{13aa}{144} + \frac{alz}{4}$, ſumptis logarithmis in logarithmica habente parametrum a, à puncto per quod ordinata eſt $\sqrt{\frac{aa}{3}}$. Quo ſpatio invento, ſi addamus illi conſtans rectangulum ex $PH\sqrt{\frac{aa}{3}}$ in MP $\frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$ quod eſt $\frac{4}{9}aa$ fiet indeterminatum ſpatium $NHOLMN = \frac{9z^4 + 36aazz + 36a^3lz + 51a^4}{144aa}$, quo dempto ex rectangulo QHOL quod eſt yz ſeu $\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{4aa}$ reliquum eſt $\int zdy$ ſpatium NMLQ $= \frac{zz}{4} + \frac{3z^4}{16aa} - \frac{alz}{4} - \frac{5aa}{48}$, quod diviſum per a, dat x ordinatam quæſitæ curvæ $= \frac{zz}{4a} + \frac{3z^4}{16a^3} - \frac{lz}{4} - \frac{5a}{48}$.

Cùmque, aſſumpta ad arbitrium y (modo ſit major quàm $\frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$, ſecùs enìm omnis z foret imaginaria) duplex habeatur z, QL, & QK, duplex erit valor ordinatæ quæſitæ curvæ cuivis abſciſſæ y debitus. Hæc curva per hanc quadraturam ſic conſtructa eſt illa quam vocant minimæ reſiſtentiæ, ro-

rotata enim circà axem in quo ipſæ x aſſumuntur ſolidum gignit, quod minimè omnium ejuſdem longitudinis, & latitudinis reſiſtentiam patitur à fluido in quo per ſui axis directionem moveatur, quod tamèn hoc loco oſtendere noſtrum non eſt.

Ne autèm digreſſio hæc, quę jàm modum exceſſiſſe videri poterit, ulteriùs producatur, alios caſus quibus quadratrix algebraicè quadrari poſſit, aut nequeat diſtinguere negligimus quod etiàm factu difficile, ac vix quidèm poſsibile arbitror, ſi regulam unicam generalem requiramus ſatis oſtendentem

quando nàm quantitas $$\frac{dz : \overline{a^{\frac{ar+am}{m+n+r}} + a^{\frac{-an}{m+n+r}}\, zz}^{\frac{m+n+r}{ar}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$$

ſit algebraicè quadrabilis, quò ſemper reducitur quadratura curvæ quadratricis, ſivè inventio ordinatæ quæſitæ.

Exemplum IV.

QVando deſcribenda ſit curva, cujus ſubtangentis data quævis poteſtas *m*, addita datæ poteſtati ſubnormalis *n*, datam poteſtatem *r* logarithmi ordinatę ſemper efficere debeat, æquatio erit $\frac{y^m dx^m}{dy^m} + \frac{y^n dy^n}{dx^n} = ly^r$, qua proptèr $y^m\, dx^{m+n} +$

y^n

$y^n dy^{m+n} = ly^r dy^m dx^n$, ubi unitas ſubintelligitur implere dimenſiones quæ deſunt, ſi alicubi deſint: pono nùnc $dx = zdy$ (ſubintellige unitatem, quæ dividat zdy) & erit ęquatio curvę quadratricis $y^m z^{n+m} + y^n = ly^r z^n$. Conſtructa igitùr curva in qua coordinatę ſint z, & y, quæque ſalvet hanc æquationem, ſi ſpatijs ad axem in quo ordinatæ y aſſumuntur diviſis per conſtantem 1 ponantur æquales lineæ rectæ, illæ erunt ordinatæ pro curva quæſita ſpectantes ad abſciſsas y.

COROLL.

Quotiès $m = 1$, $n = 0$, & r fuerit numerus quilibet, quadratura curvæ quadratricis dependet tantùm à logarithmis, æquatio enìm erit (poſito ex. gratia $r = 3$) $yz + 1 = ly^3$ & ſupplendo per literam a dimenſiones quę deſunt, ut omnes termini æquales habeant dimenſiones, ſivè vocando a quam vocavimus 1, erit æquatio $ayz + a^3 = ly^3$, undè $z = \frac{ly^3 - a^3}{ay}$; ergò $zdy = \frac{ly^3 dy}{ay}$

(nu.61.) $- \frac{aady}{y}$. Terminus autèm $\frac{ly^3 dy}{ay}$ eſt integrabilis, &

(nu.27.) eſt integrale $\frac{ly^4}{4aa}$, integrale etiàm ex $- \frac{aady}{y}$ eſt $-aly$

in Logiſtica cuius parameter ſit a; ergò ſpatium $\int zdy$

erit

erit $\frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4aa}$, & ordinata quæſita $= \frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4a^3}$ $= x$ æquatio quæſitæ curvæ. Dantur & alij caſus, quibus per ſolam logarithmicam quadratur curva quadratrix, quos ſingulos proſequi nec eſt animus, nec fortè poſſibile foret.

Digitized by Google

SECTIO QUINTA.

De conſtructione æquationum differentialium primi gradus, quas conſtet non eſſe algebraicè integrabiles, & cum ambæ indeterminatæ illas ingrediantur, ſunt tamèn cum ſuis differentialibus ab invicèm ſeparabiles.

PROPOSITIO PRIMA.

88 UT plurimùm tamèn, æquatio differentialis ad quam pervenitur pro quæſita linea, talis eſt ut utraq; indeterminatarum illam ingrediatur cum ſuis differentialibus, & hoc quidèm caſu, ſi indeterminatæ cum ſuis differentialibus ab invicèm ſint ſeparabiles, conſtruetur æquatio per mòx afferendam regulam. Eſſe autèm ſeparabiles ab invicèm indeterminatas cum ſuis differentialibus hoc tantùm importat, quod æquatio ſit ad talē formam (ope conſuetarum operationem Antitheſis, multiplicationis, diviſioniſve legitimè adhibitarum) reducibilis, ut ab una parte, ſola indeterminatarum alterutra u, cum du, & conſtantibus reperiatur, & ſimùl ab altera parte ſola adſit reliqua indeterminata t cum ſua dt, & conſtanti-

ti-

Digitized by Google

tibus. Sicque omnis æquatio differentialis primi gradus, in qua hæc indeterminatarũ cum ſuis differentialibus ſeparatio facta ſit, reducetur ad hanc formam qdt = pdu, vbì duæ indeterminatę ſunt t, & u, & q eſt quantitas quomodocumque data per t, & conſtantes, p verò data per u & conſtantes.

89 Methodus igitùr pro conſtruenda æquatione generali ſivè canonica qdt = qdu talis eſto. Fiat curva cuius ordinata ſic detur per abſciſſam, ut p datur per u, quam vocabimus primam. Deindè fiat alia curva quam dicemus ſecundam, cuius ordinatę per ſuas abſciſſas talitèr dentur, qualitèr q datur per t. Debet porrò hic unitas ſubintelligi, quæ quantitates p, & q unius dimenſionis eſſe faciat per multiplicationem, aut diviſionem. Tùm deſcribatur tertia quædam curva quam quadratricem primam appellare poſſumus, cuius abſciſſæ ſint eædem ac abſciſſæ primæ curvæ, ordinatę vero ſint ſpatijs, quæ prima curva continet proportionales, ſivè ſint æquales ſpatijs, quæ axe, curva, & coordinatis primæ curvæ clauduntur diviſis per conſtantem illam, quam vocavimus unitatem. Haùd abſimili modo debet conſtrui quarta curva, quę eſt quadratrix ſecunda, & eius quidèm abſciſſę abſciſſis ſecundæ æqualibus poſitis, ordinatæ erunt ęquales correſpondentibus ſpatijs ſecundæ, diviſis per vnitatem. Quibus quatuor curvis prędeſcriptis ad deſcriptionem quæſitæ poterimus deſcendere. Aſſumpta enim in quadratrice

prima abſciſſa arbitraria u, transferatur eius ordinata in axem coniugatum lineę quadratricis ſecundæ, & ei competens abſciſſa in eadem quadratrice ſecunda erit ordinata quæſitæ lineæ quam abſciſſæ u debemus. Ut exempli gratia deſcripta curva prima AB ad axem AC tali, ut ordinata eius CB ſic detur per abſciſſam AC ut p datur per u, eſto curva AD quadratrix prima talis, ut ordinatæ eius CD, ad eaſdem abſciſſas AC attinentes, ſint æquales ſpatijs ACB per conſtantem 1 diviſis. Deindè deſcripta alia curva ſecunda EF ad axem EG, axemque coniugatum EI, cuius ordinatæ GF ſic dentur per abſciſſas EG, ut q datur per t, ponatur quadratrix ſecunda EK, habens ordinatas KG, ad eaſdem abſciſſas EG ſpectantes æquales ſpatijs EGF diviſis per conſtantem 1. Tandèm aſſumpta adlibitum abſciſſa AC ſivè LM in curva prima, aùt in quadratrice prima eius ordinata DC transferatur in EI axem coniugatum quadratricis ſecundę, & ducta ordinata HI huic fiat æqualis NM, eritque N in optata curva.

(fig. 28.)

90 Cum enìm CB ſic detur per AC ut p datur per u, aùt (quod idem eſt) AC, ſic ingrediatur compoſitionem ipſius CB ut u ingreditur compoſitionem ipſius p, ſequetur quod ſi AC ſit $=$ u, erit CB $=$ p, & proindè DC $= \int$ pdu. Eodem modo cum GF ſic detur per GE ut q datur per t, aut EG ſic componat GF, ut t componit q, ſi fuerit EG $=$ t, erit GF

$=$ q,

$=$ q, & proindè KG $= \int$ qdt, & ſi viceverſa fuerit GF $=$ q, erit EG $=$ t, aùt etiàm ſi fuerit KG $= \int$ qdt, erit GE $=$ t, vel ſi fuerit HO, aut IE $= \int$ qdt, erit EO aut IH $=$ t. Aſſumpta igitùr arbitraria AC $=$ LM $=$ u, erit DC $= \int$ pdu, $=$ IE, ſed eſt $\int$ pdu $= \int$ qdt, erit ergò IE $= \int$ qdt, igitùr IH $=$ NM $=$ t. Curva igitùr LN ſic deſcripta, habet coordinatas t, & u verificantes æquationem qdt $=$ pdu.

COROLL.

91 Solita conſtantium additio, aut detractio poteſt & hìc adhiberi, ut ſi curva quadratrix prima, non haberet ordinatas proportionales ſpatijs ACB, ſed æquales illis ſpatijs conſtante ſpatio auctis, quod lineam quadratricem AD cæteroquìn invariatam promoveret tantum in OP, remanentibus tamèn adhùc ordinatis CP $= \int$ pdu. Similitèr, & ſi ſecunda quadratrix EK, non ampliùs ordinatas KG ſpatijs EGF, ſed illis ſpatijs conſtante ſpatio auctis proportionales haberet, quod lineam EK transferret aliorsùm ut in QR, remanentibus tamèn GR $= \int$ qdt. Quæ nihilominùs curvarum licet poſitio-

nis

nis tantùm varietates, curvam quæſitam inſignitèr poſſent mutare, ſalva adhùc æquatione differentiali qdt = pdu. Igitùr per datum punctum N, dato etiàm vertice L ad datum axem LM poterit duci curva ad datum ęquationem pdu = qdt convenientèr. Ducta enìm normali NM aſſumatur ei æqualis IH ordinata in quadratrice ſecunda, deindè aſſumpta AC = LM, ſiquidèm ſpatium ACB per datam conſtantem diviſum ęquetur lineæ IE, nulla conſtantis additione opus erit, & curva deſcripta adamuſsìm per methodum traditam, tranſitura eſt per N. Sèd niſi hoc ſpatium ACB diviſum per datam illam conſtantem ſit ęquale inventę IE, multiplicetur IE per illam conſtantem datam quæ eſt unitas, ſpatiumque IEI dematur ex ſpatio ACB, & reliquum erit conſtans illud ſpatium, quod ſpatiis indeterminatis AGB vbiquè addèndum, vel demendum venit pro deſcribenda quadratrice prima AD, quâ deindè vti debemus ad quæſitę LN deſcriptionem, & qua porrò ſi utamur, linea quam ducemus certò certiùs per N eſt tranſitura.

Exemplum.

(fig.29.) 92 DAta quavìs curva FC ad axem AB, debeat ad eundem axem deſcribi ED, talis, ut ſi ducatur quævis ordinata BD, & producatur ad curvam datam in C, ſit ſubtangens puncti D in cur-

curva ED æqualis ordinatæ CB in data curva. AB vocetur x, BD = y, CB verò = q. Patet igitùr quod q dabitur per x, proptèr datam curvam FC, ſivè proptèr datam ejus æquationem, quæ exprimet quomodo CB dependeat ab AB. Quapropter ęquatio $\frac{ydx}{dy} = q$ ſive $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$, ad quam pervenietur eſt ex illis in quibus indeterminatæ cum ſuis differentialibus ab invicèm ſunt ſeparabiles. Multiplicemus per aa, & erit $\frac{aadx}{q} = \frac{aady}{y}$. Iàm ergò curva eſt conſtruenda cujus ordinata detur per ſuam abſciſſam ut $\frac{aa}{y}$, datur per y, ſivè cujus ęquatio ſit $z = \frac{aa}{y}$, quę eſt hyperbola. Altera curva erit illa, cujus æquatio ſit $z = \frac{aa}{q}$, ſivè cujus ordinata z ſic detùr per ſuam abſciſſam, ut $\frac{aa}{q}$ datur per x, aùt breviùs, cujus ordinatæ ſint ipſis q ordinatis datæ curvæ reciprocè proportionales. Harum curvarum ope, & ope ſuarum quadratricum, ut jàm dictum eſt quæſita curva DE poterit deſcribi. Sed eſt diligentèr advertendum, quod cum ſpatia, quę hyperbolem intèr & aſymptotum jacent ſint infinitę omninò magnitudinis, hinc quadratrix prima eſſet linea cujus omnis ordinata infinitæ foret longitudinis, nec proindè eſſet linea aſſignabilis, & quam poſſemus deſcribe-

Digitized by Google

bere, aut adhibere. Hinc quadratrix prima talitèr erit ducenda ut ejus ordinatæ, non ſpatijs totalibus hyperbolicis ſint proportionales, ſed ſpatijs, conſtante quadam ordinata terminatis, quam arbitrarium eſt ſeligere. Ut ſi HE concipiatur eſſe hyper- (fig. 11.) bola deſcripta juxtà ęquationē $z = \frac{aa}{y}$, cujus quadratrix ſit ducenda, jam non opus eſt totalibus ſpatijs CKIHFEDC per conſtantem datam a diviſis, æquales ponere ordinatas quęſitę quadratricis (quod quidèm in praxi impoſsibile eſſet, ob infinitam horum ſpatiorum magnitudinem) ſed cum conſtans ſpatium poſſimus his ſpatijs addere, aut demere, ducamus ordinatam ad arbitrium AF (ſitque brevitatis ergo AF = AC) & ponamus quadratricis ordinatas æquales ſpatijs AFED, aùt AFLM per conſtantem a diviſis; ſic enìm idem efficimus ac ſi totalia ſpatia aſſumeremus ſed mulctata conſtante infinito ſpatio CKIHFAC, quod fieri poſſe prænotavimus. Quod ſi fiat, quadratrix AB ſic deſcripta erit (nn. 56.) logarithmica ut aliàs obſervavimus, ejuſque ſubtangens AC = a. Patet igitùr quomodo quęſita curva $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$ conſtruatur, & ſimùl logarithmos ejus ordinatarum eſſe proportionales ſpatiis eaſdem abſciſſas habentibus in curva, cujus ordinatę ſint datæ curvæ ordinatis q reciprocè proportionales. Nec (fig. 29.) abſimilitèr ſi debeat curva CF talis eſſe ut, ducta

qua-

Digitized by Google

quavis ordinata CB, quæ producta datam curvam DE ſecet in D, ſit ordinata BD ęqualis ſubnormali curvæ quęſitæ CF, undè æquatio ſit $\frac{ydy}{dx} = q$, erit $ydy = qdx$. Curva igitùr prima erit cujus ordinatæ ſic dentur per ſuas abſciſſas ut y datur per y hoc eſt, erit non curva, ſed recta angulum cum axe ſemirectum conſtituens, ejuſque quadratrix proindè erit parabola communis. Curva porrò ſecunda erit ipſa DE, quia ejus abſciſsis exiſtentibus x, debent ordinatę eſſe q. Ex propoſitę igitùr lineę DE quadratrice, & ex communi parabola conſtruetur quæſita linea; cujus ęquatio $ydy = qdx$ brevius reduci potuiſſet integrando primam partem, quæ eſt integrabilis & fiet $yy = 2\int qdx$, undè quadrata quęſitarum ordinatarum BC dupla eſſe reperientur ſpatiorum correſpondentium ABDE in propoſita curva.

COROLL.

93 HOc exemplum maximę eſt univerſalitatis, quotieſcumque enìm valor ſubtangentis curvę deſcribendę talis eſt, ut ordinata y illum non intret, ſed per ſolam abſciſſam x exprimatur, ſemper caſus erit hujus exempli, poterimus nempè ſemper, valorem illum ſubtangentis concipere tamquàm ordinatam curvę alicujus datæ, & vocare q, undè

quæſitio ſemper reducta erit ad illam quam ſuperiùs ſolvimus, idemque valet de ſubnormali ſi exprimatur & ipſa per valorem, quem ordinata y nullatenus ingrediatur.

Exemplum II.

(*fig.* 2.) 94 DEſcribenda ſit curva AD habens pro axe circuli peripheriam AB centrum habentem in C, cujus curvę ſubtangens BT ſit quomodocumque data per abſciſſam AB. Valor ſubtangentis BT in curva AD habente pro axe quamvis lineam AB
(*nu.* 16.) eſt $\frac{yqdx + yydx}{qdy}$ poſitis AB $=$ x, BD $=$ y, & q radio oſculi pertinente ad punctum B axis. Cum igitùr in hoc caſu axis ſupponatur eſſe linea circularis, ejus radius q erit conſtans $=$ a ſemidiameter ipſius axis; quarè ſubtangens $= \frac{yadx + yydx}{ady}$, quæ debet æquare quantitatem p datam quomodocumque per x, undè $yadx + yydx = apdy$, ſivè $\frac{dx}{ap} = \frac{dy}{ay+yy}$ vel $\frac{adx}{p} = \frac{aady}{ay+yy}$, undè eruere eſt conſtructione hanc
(*fig.* 30.) traditæ regulæ conformem. Primò curva deſcribatur KI, ejuſque ordinata MI talitèr detur per ſuam abſciſſam LM ut $\frac{a^3}{ay+yy}$ datur per y, hoc eſt æqua-

tio

rio curvæ KI eſto $u = \frac{a^3}{ay+yy}$. Fiat porrò ejus quadratrix WNO talis ſcilicet ut ejus ordinata MN ſpatiis WÆMI per conſtantem a diviſis ſit æqualis (ſumo ſpatia WÆMI, quę conſtante ordinata WÆ terminantur, quia ſpatia totalia intèr curvam, & aſymptotum ŒL infinitæ ſunt magnitudinis) quę quidèm erit qualem reprę ſentat figura, & erit ad aſymptotū ŒL, ac ad aliā ŒZ, quę ſit axi WL parallela in diſtantia ŒL = l 2a in logiſtica cujus a ſit ſubtangens, & l a = o. Conſtruatur poſteà ſecunda quædam curva SQ, in qua ordinatæ PQ ſic dentur per ſuas abſciſſas PS ut $\frac{aa}{p}$ datur per x, & ſpatiis SPQ ad conſtantem a applicatis, ęquales ponantur ordinatæ PY novam conſtituentes curvam SY quadratricem ipſius SQ. Tùm, aſſumpta LM = y, ordinatæ correſpondenti NM ſic curva WNO æqualis abſcindatur SX ex axe conjugato lineæ SY, & ducta ordinata XY hæc erit quæſita x; undè jàm poterimus, facto centro C, radio a deſcribere circulum, aſſumptaque portione AB = mox inventæ x, ducerè *(fig. 2.)* deindè BD = aſſumptæ y, ſive LM figuræ 30, eritque punctum D in curva quęſita.

95. Potuiſſemus etiàm ęquationem $\frac{adx}{p}$ integrare ſaltèm logarithmicè, quia integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$

 eſt

Digitized by Google

eſt $ly - l\overline{a+y}$, undè ęquatio integrata fuiſſet $\int \frac{adx}{p} = ly - l\overline{a+y} + l2a$, quam conſtantem
(fig. 30.) addo ut poſita $y = a$ ſit ordinata NM quadratricis $= o$, ſicque conſtructio coincidat cum ea quam ſuperius tradidimus, idem enim eſt curvam NW deſcribere quadratricem lineę IÆ ac ordinatam NM ponere ęqualem ubiq; quantitati $ly - l\overline{a+y} + l2a$, poſito logarithmos ſumi in logarithmica cujus a ſit ſubtangens & $la = o$, cum ſpatium WÆMI per a diviſum, ſivè integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$ nil aliud ſit quàm $ly - l\overline{a+y} + l2a$, uudè ſpatium infinitè longum inter WÆ, & curvam & aſymptotum WM eſt $al2a$.

Exempla hęc ſufficere poſſe judico, cum reliqua, quę referri poſſent per applicationem traditæ regutæ reſolvi facilè poſsint; quarè ſatiùs fuerit his dimiſsis, ad ultimam ſectionem omnium utiliſsimam properare.

SE-

SECTIO ULTIMA.

Conſtructio variarum æquationum differentialium primi gradus in quibus ambæ indeterminatæ cum ſuis differentialibus reperiuntur, nec tamèn ſunt ab invicèm ſeparabiles, non exiſtente æquatione algebraicè integrabili.

---

96 TAndèm conſiderandæ ſunt reliquę æquationes, quæ præmiſsis ſectionibus non clauduntur, ſuntq; omnes æquationes differentiales primi gradus algebraicè non integrabiles in quibus ambæ indeterminatę reperiuntur cũ ſuis differentialibus, nec apparet quomodo ab invicèm poſsint ſeparari. Si enìm per conſuetas operationes antitheſim, ſcilicet aut multiplicationem diviſionemve ęquationis, via reperiatur qua ab invicèm illæ diſparētur, æquatio reducta erit ad formam præcedentis ſectionis, conſtrueturq, per regulas ibi traditas. Sed quando per nullam harum operationum ſeparatio obtineri poſsit, & opus ſit ſubſtitutione aliqua, ſivè ut aſſumātur aliæ indeterminatæ ab ijs, quas aſſumpſimus ad faciliorem redendam ſeparationem, vel ad quomodocumque commodiorem præparandam æquationem, tùnc via aperienda eſſet qua his

ſub-

Digitized by Google

ſubſtitutionibus, & denominationibus opportunè, & efficaciter ſemper uti poſſimus.

97 Sciendum eſt autèm, quod quamvis multæ inventæ ſint, & plures etiàm inveniri poſsint regulæ, pro conſtruendis quibuſdam ex his ęquationibus quarum indeterminatæ non ſunt per communes algorithmicas operationes ab invicèm extricabiles, nulla tamèn adhùc tradita eſt regula univerſalis omnes tales æquationes complea, ità ut ſtatìm ac æquationem invenerimus poſsimus ope canonis alicujus ad ejus effectionem certò manuduci. Quod ſi repertum eſſet, nihil ampliùs circà æquationes differentiales primi gradus deſiderandum foret, ſeù circà methodum tangentium inverſam, ſivè ut vocant ſubtangentalem. Cùm enìm, data tangentis proprietate, per Sectionis primæ regulas ad æquationẽ ſtatìm quæſitę curvę differentialem primi gradus deducamur, ſi harum deindè æquationum nulla non poſſet per notas regulas effici, jàm curvam ipſam cujus data eſt proprietas in poteſtate eſſe confidentèr poſſemus pronunciare, ſiquidèm data tangentis conditio talis eſſet, ut ęquationem differentialem primi gradus ſuppeditaret.

98 Hæc igitùr duo præcipuè deſunt perfectioni totius Theorię ęquationum differentialium primi gradus. Primò (quod Sectione ſecunda pręnotavimus) methodus indicans an quęvis propoſita ęquatio ſit algebraicè integrabilis, & detegens ejus inte-

gra-

Digitized by Google

grale algebraicum, ſi poſſibile ſit; ſeù modus (idem enim eſt) cognoſcendi integrale algebraicum, ſi detur, cujuſvis quantitatis differentialis primi gradus, aùt ejus impoſsibilitatem evincendi. Hùc pertinent quadraturæ ſpatiorum curvilineorum, rectificatio itèm curvarum, ſolidorum, & ſuperficierum dimenſiones, inventiones centri gravitatis, & complura hujuſmodì. Alterum autèm quod adhùc deſideratur, eſt conſtructio univerſalis omnium æquationum primi gradus indeterminatas inſeparabiles claudentium, hoc eſt via regia infallibilis perducens ad conſtructionem curvæ quęſitæ quotiès inventa ſit ejus differentialis æquatio primi gradus, licèt in illa indeterminatæ cum ſuis differentialibus ſint ab invicèm inſeparabiles.

Sicutì igitùr in ſecunda Sectione ex deffectu regulæ univerſalis, plures particulares regulas congeſſimus, eaſq; ut canones tradidimus, quibus ſæpè deffectum univerſalis regulæ ſuppleri accidit, ità & in præſenti exponemus ſolùm quaſdam regulas pro certis æquationibus, duplicem indè fructum collecturi, & ut hos canones in multam univerſalitatem expanſos pro uſu ſervemus, & ut ſemitam ſimùl aperiamus qua in multis ſimilibus caſibus æquationum præparatio, & conſtructio ſit tentanda.

Quamvis tamèn is optimè de ſubtangentali methodo meritus cenſendus ſit, qui plures harum regularum collegerit, & in ordinem redactas publico

fue-

Digitized by Google

fuerit impertitus, nos nihilominùs ad finem feſtinantes paucas aſſumemus, eaſq; ad hunc finem præcipuè accomodabimus ut ijs, quibus egregia celeberrimorum Virorum inventa abſcondita nimis videatur facem præferamus, inventiſque ipſis omnem cujus capaces ſunt univerſalitatem conciliemus.

Propoſitio I.

(fig. 31.) 99 SIt primò curva AHEC deſcribenda, cujus ordinata quævis BC ſit ad portionem AD ſubtangentis intèr verticem, & tangentem in ratione conſtante data 1 ad n. Erit igitùr proportio y, $\frac{ydx - xdy}{dy}$ :: 1, n, & æquatio $ydx - xdy = nydy$, in qua æquatione quantumvis transferas ab una ad alteram partem terminos, aùt dividas, multipliceſve totam æquationem per quamcumq; quantitatem, nunquàm ſic poteris reducere, ut y cum dy conſtituat unam æquationis partem, quam nullatenùs x, nec dx afficiat. Uno verbo æquatio non eſt ex ijs quarum indeterminatę cum ſuis differētialibus ſint
(nu. 88.) ſeparabiles ab invicèm. Videamus igitùr quomodonàm $ydx - xdy = nydy$ poſſit reddi conſtruibi-
(nu. 41.) lis. Quo ad membrum $nydy$, illud ſanè eſt integrabile, ſed pars $ydx - xdy$ non erit integrabilis. Si ſcriptum eſſet $ydx + xdy$, manifeſtè integrabilis foret etiàm hæc æquationis pars, & integrale eſſet xy, ha-

haberemus itaquè integrando æquationem $xy = \frac{nyy}{2}$, ſivè $xy \mp aa = \frac{nyy}{2}$. Id oſtendit quod ſi quæſiviſſemus lineam, cujus ſubtangentis ſumma cum abſciſſa haberet ad ordinatam rationem datam, incidiſſemus utiquè in ęquationes ſatisfacientes $xy = \frac{nyy}{2}$ (ſivè $x = \frac{ny}{2}$)& $xy \mp aa = \frac{nyy}{2}$, quia tùnc ęquatio eſſet $ydx + xdy = nydy$. Verùm in caſu noſtro, cum ęquatio ſit $ydx - xdy = nydy$, non poſſumus eâdem methodo procedere. Sicuti autèm $ydx + xdy$ habet integrale xy, ità $ydx - xdy$ ſtatim ſuſpitionem facit nùm fortè haberet $\frac{x}{y}$, & ſanè haberet ſi ſcriptum eſset $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Dividatur igitùr ęquatio inventa $ydx - xdy = nydy$ utrinquè per yy, & erit $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{ndy}{y}$; multiplicemus tantùm per a æquationem (ſi lubeat) & erit $\frac{aydx - axdy}{yy} = \frac{nady}{y}$, quę integratur, & erit $\frac{ax}{y} = nly$, undè $x = \frac{nyly}{a}$. Curva ſecundum hanc æquationem conſtructa eſt qualem exponimus in figura caſu quo $n = 1$, AE a, AB $= x$, BC $= y$, $la = o$. Maxima HG eſt cum fuerit $ly = -a$, hoc eſt logarithmus ſuæ abſciſſæ GA debet eſſe $= -a$. Spatiũ quodvis AGH eſt $= \frac{2nyyly - nyya}{4a}$,

undè in caſu figuræ quo $n = 1$ erit ſpatium quodvis AGH $= \frac{2yyly - ayy}{4a}$, ſivè tùnc ſpatium AEHA $=$ aa quadrato ex dimidia AE. Solidum ex revolutione figuræ EHA circà axem EA eſt ad cylindrum cujus baſis ſit circulus radio EA, & altitudo æqualis radio, ut $2nn$ ad 27, & ſi n fuerit 1, erunt ſolidum & cylindrus ut 2 & 27. Vocando enìm b ſemiperipheriam circuli cujus a ſit radius, erit circulus cujus quævis HG ſivè x, ſivè $\frac{nyly}{a}$ ſit radius $= \frac{nnbyyly^2}{a^3}$, & elementum ſolidi ex revolutione figuræ cujuſvis AGH circà AG erit $\frac{nnbyyly^2dy}{a^3}$, ergò ſolidum illud hujus quantitatis integrale erit

(nu.62.) æquale quan.itati $\frac{9nnby^3ly^2 - 6nnaby^3ly + 2nnaaby^3}{27a^3}$

nec aliquid conſtans addendum eſt, cum evaneſcat evaneſcente y. Poſito igitùr $ly = 0$, & $y = a$ erit ſolidum ex revolutione totius figuræ AHGEA circà AE $= \frac{2nnbaa}{27}$, & cũ cylindrus radiũ baſis, & altitudinem habens a ſit aab, erit ſolidum illud ad cylindrum hunc, ut $2nn$ ad 27.

Propoſitio II.

100 SI ratio ordinatæ CB ad reſectam AD non ſit conſtans, ſed ſit illa quam habet 1 ad quan-

quantitatem n quomodocumq; datam per y, eadem erit æquatio, ſed jam n non erit conſtans ſed variabilis, & data per y. Undè, facta operatione quæ ſuprà, invenietur $\frac{ax}{y} = \int \frac{nady}{y}$, undè $x = y \frac{\int \frac{nady}{y}}{a}$, vel $x = y \int \frac{ndy}{y}$. Conſtruenda igitùr eſt curva (aſſumpta ad arbitrium AI, vel CB = y) cujs ordinatę ſint $\frac{n}{y}$ (poſitis y abſciſſis), tùm fiat, ut conſtans quam vocavimus 1 ad y :: ità ſpatium quod curva hæc cum axe ſuo claudit, diviſum per eandem 1 ad quartam, quę quarta erit x quæſita, erit enìm manifeſtè $= y \int \frac{ndy}{y}$.

101 Hoc idem quæſitum ſic aliter exponetur: Data curva AK, alia deſcribatur AHEC, talis ut, ſi quævis prioris curvę ordinata IK producatur uſquè ad quæſitam lineam in C, ducaturque per C tangens CD, axem alium AD priori coniugatum ſecans in D, portio AD tangentem hanc & verticem A intercepta, ſit ad abſciſſam IA, ut ordinata IK ad conſtantem. Hinc ſi AK fuerit cujuſvis gradus m parabola, cujus ſiquidèm ordinatæ IK ſivè n æquentur poteſtatibus ab m denominatis abſciſſarum correſpondentium IA, erit curva quæſita parabola generis uno gradu altioris ſive exponentis

 $m+$

$m+1$, cujus parameter ſit ad parametrum propoſitæ ut 1 ad m. Si AK ſit una ex curvis quas ſuprà
(nu. 57. & ſeq.) conſideravimus, ità ut IK ſit quævis poteſtas logarithmi ſuæ abſciſſæ IA, ſic ut $n = ly^r$, erit IC $= y \int \frac{ly^r dy}{y}$. Eſt autèm ſemper $\frac{ly^r dy}{y}$ integrabi-
(nu. 61.) lis, & integrale eſt $\frac{ly^{r+1}}{r+1}$ (poſita ſubtangente logarithmicæ pro unitate) undè x ſivè IC $= \frac{yly^{r+1}}{r+1}$.
Nec plura addimus rem ſatis explicatam ducentes.

Propoſitio III.

(fig. 32.) 102 Debeat deſcribi curva AC hanc ubiquè ſervans proprietatem ut, ducta per quodvis in ea punctum C tangente, quę axem in D ſecet, intercepta AD, ſivè ut vocant, ſubtangentalis habeat ad tangentem DC conſtantem rationem. Si ratio hæc ſupponatur eſſe quæ q ad p incidemus in
(nu. 10.) æquationem alibì allatam $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppy\,xdydx = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$, vocando EA $= x$, & EC $= y$. Sed æquatio hęc nimis implicita eſt, ità ut per illam ad conſtructionem quæſitę lineæ non facilè deducendi ſimus. Tentandum erit igitùr nùm, aſſumendo pro indeterminatis alias lineas ab ipſis AE, EC, ęquatio reſultans faciliùs ſit extricabilis.

Ma-

Maximè intereſt in problematum ſolutione quando ex data tangentis proprietate indaganda eſt linea cui competit, quænam pro indeterminatis ſeligantur, mirum enìm in modum variantur ęquationes ſi hæ, vel illę potiùs quàm alię coordinatę fuerint aſſumptæ. Nec tamèn datur regula docens, quænam indeterminatæ ſint præeligendæ, ut ſimpliciſſimam obtineamus æquationem, quæque maximè omnium capax ſit conſtructionis, caſu enìm potiùs quàm induſtria ad illas pervenitur, utpotè quod optioni fortuitæ, & arbitrariæ unicè ſit tribuendum.

103 Non raró tamèn evenit, quod ſi pro coordinatis curvæ quæſitę aſſumantur illę eædem lineę, quæ ex vi datæ proprietatis, ſeù conditionis apparent habere ad invicèm ſimpliciſſimam veluti relationem, ad æquationem perveniatur conſtructioni magis accomodam, quia ſcilicèt illæ lineæ, quarũ relatio omnium ſimpliciſſima cenſetur ut plurimùm etiàm æquationem (qua illa relatio eſt tantùm exprimenda) ſimpliciſſimam continebunt, ac proindè faciliùs tractabilem, & faciliùs conſtruibilem. Quę tamen regula, ut apparet, non pro axiomate quodam haberi debet univerſali, atq; infallibili, ſed tantùm inſervire debet ad hoc ut, poſtquam per alias vias tentaverimus conſtructionem ęquationum, etiàm per hanc periculum faciamus, ſępè enìm inveniemus rem felicitèr ſuccedere.

104 In caſu propoſiti problematis, res ità ſe habet. Conditio eſt, ut DC ad AD, habeat rationem conſtantem, quam vocabimus unitatis ad *n*. Aſſumemus igitùr ipſam DC pro una indeterminatarum, quia ſimpliciſſima eſt ipſius DC propietas quę datur. Vocabimus igitùr DC = x, undè AD = *n*x, ex data proprietate. Ad determinandum autèm punctum curvæ C non ſufficit aſſumpſiſſe AD = *n*x, & DC = x niſi ſimùl determinetur quonam angulo DC debeat ad axem inclinari; non enìm ſufficit harum linearum longitudo, niſi ſimùl, & ipſius DC poſitio determinetur; opus eſt igitùr aliam indeterminatam aſſumere y, progreſsù operationis per aſſumptam x, & *n*x notificandam. Linea quæ ſimpliciſſimè poſititionem ipſius DC determinet eſt CB, vel BD, vocemus ergò exempli gratia BC = y, undè BD $=\sqrt{xx-yy}$. His denominationibus inſtitutis, conditio ad æquationem nos ducens erit hæc; quod DC ubiquè ſit tangens, ſivè quod differentiale ordinatæ CB y, ad differētiale abſciſſæ AB $nx+\sqrt{xx-yy}$ ſit ut ipſa ordinata y ad BD $\sqrt{xx-yy}$. Factis igitùr horum differentialium valoribus, erit proportio dy, $\dfrac{ndx\sqrt{xx-yy}+xdy-ydy}{\sqrt{xx-yy}}$ :: y, $\sqrt{xx-yy}$, ex qua eruetur æquatio ſed quæ tamèn æquè ac illa, quam initio attulimus non eſt manifeſtè integrabilis. Ratio autèm quare ſit adeò implicita æqua-

tio

tio ad quam per hanc viam devenitur eſt, quod poſtquàm per multiplicationem extremorum, & mediorum ex quatuor terminis huius analogiæ obtinuerimus æquationem, opus eſt illam quadrare ad eleminandas quantitates ſurdas, quia ſignum radicale continet utramque indeterminatam, ac pro indè ut earum ſeparatio tentetur, opus eſt ſigna radicalia tollere, undè fit ut ęquatio magis magisquè difficilis fiat, miſcentur enìm sìc meliùs ad invicèm x, & y.

105 Verum quidèm eſt, quod ſi vocaverìmus non CB, ſed BD $=$ y, inveniſſemus ęquationem minus compoſitam; erit nempè AB $= nx + y$, CB $=\sqrt{xx-yy}$; undè aſſumptis harum differentialibus, proportionales erunt $\frac{xdx-ydy}{\sqrt{xx-yy}}$, $ndx+dy$ :: $\sqrt{xx-yy}$, y, & facta æquatione, opus tantùm erit illam reducere ad communem denominatorem, ut ſigna radicalia omninò tollantur, & æquatio proveniet $nxxdx-nyydx+xxdy=xydx$; ſed tamèn hęc eadem æquatio non apparet quomodò conſtruibilis ſit, neque enìm videmus quomodò illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicèm ſeparemus.

106 Satiùs igitùr eſt ut curemus irrationales quantitates evitare denominando talitèr ut $\sqrt{xx-yy}$ ſit quãtitas rationalis, ſivè ut $xx-yy$ ſit quadratum;

no-

notum eſt autèm, quod formula omnium ſimpliciſſima pro efficiendo ut $xx - yy$ ſit quadratum eſt ſi ponatur $xx - yy = xx - 2yxz + yyzz$. ſic enìm invenietur $y = \frac{2xz}{zz + 1}$ quod indicat, lineam CB, quam vocabamus y debere vocari $\frac{2xz}{zz + 1}$, ad hoc ut $xx - yy$ ſit aliquod quadratum, & $\sqrt{xx - yy}$ ſit quantitas rationalis. Sanè ſi ex xx demas quadratum quantitatis $\frac{2zx}{zz + 1}$ reliquum erit quadratum cuius radix erit $\frac{zzx - x}{zz + 1}$ vel etiàm $\frac{x - zzx}{zz + 1}$.

107 Denominemus igitùr tandèm $DC = x$, AD nx, & $CB = \frac{2zx}{zz + 1}$, cuius differentiale invenietur eſſe $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2zzxdz}{z^4 + 2zz + 1}$. Erit ergò DB $= \frac{x - zzx}{zz + 1}$, quę addita ad AD quæ eſt nx facit AB $= \frac{nzzx + nx + x - zzx}{zz + 1}$, cuius differentiale erit $= \frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1}$, undè analogia ex proprietate tangentis petita ſic explicabitur $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2xzzdz}{z^4 + 2zz + 1}$, $\frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1} :: \frac{2zx}{zz + 1}$,

Digitized by Google

$\frac{x-zzx}{zz+1}$, quæ ſuppeditat ęquationem $nz^5dx + 2nz^3dx + nzdx - xz^4dz - 2xzzdz - xdz = 0$, quę diviſa per $z^4 + 2zz + 1$ dat $nzdx = xdz$, undè $\frac{ndx}{x} = \frac{dz}{z}$, & integrando $nlx = lz$, poſita unitatę pro ſubtangente, aùt etiàm quavis alia conſtante ad arbitrium; & abiectis logarithmis, ſivè aſſumptis quantitatibus, quarum ambo ęquationis membra ſunt logarithmi, erit $x^n = z$, eſt autèm $CB = \frac{2zx}{zz+1}$, ergò, poſito pro z valore x^n, erit $CB = \frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$. (nn. 57.)

108 Si loco ponendi CB, poſuiſsemus $DB = \frac{2zx}{zz+1}$, & $CB = \frac{x-zzx}{zz+1}$, æquatio ad quam peruentum fuiſſet, eandem curvam reſtituiſſet; inventis ſcilicèt differentialibus ex BC, & AB, ſi ęquatio inſtituatur, invenietur eſse $nz^6dx + nz^4dx - 2xz^4dz - nzzdx - ndx - 2xdz - 4zzxdz = 0$, quæ diviſa ut ſuprà per $z^4 + 2zz + 1$ dediſset $nzzdx = ndx + 2xdz$, ſivè $\frac{ndx}{x} = \frac{2dz}{zz-1}$, cumque fractio hęc $\frac{2dz}{zz-1}$ ſit ęqualis factionibus $\frac{dz}{z-1} - \frac{dz}{z+1}$, eſset $\frac{ndx}{x} = \frac{dz}{z-1} - \frac{dz}{z+1}$, & integrando $nlx = l\,\overline{z-1} - l\,\overline{z+1}$, & abiectis lo-

garithmis $x^n = \frac{z-1}{z+1}$, quod explicari non indiget, notum eſt enìm quod differentia duorum logarithmorum ex duabus quantitatibus eſt logarithmus quotientis ex diviſione unius per alteram ex illis. Ex hac porrò æquatione erues $\frac{x^n+1}{1-x^n} = z$, & cum CB ſit $\frac{x-zzx}{zz+1}$, invenietur eſſe CB $= \frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ prorſùs ut inveneramus etiàm per præcedentem denominationem. Quod indicaſſe ſufficiat, ut unuſquiſque poſſit, ſi calculi moleſtiam ferre velit, à ſe ipſo experiri.

109 Patet itaquè æquationem ipſam $xxdy = nydx\sqrt{xx-yy} + xydx$, quę eruitur ex analogia $dy, \frac{ndx\sqrt{xx-yy} + xdx - ydy}{\sqrt{xx-yy}} :: y, \sqrt{xx-yy}$, fuiſſe integrabi- (n.104.) lem, quod ſi inito ſtatìm licuiſſet animadvertere, jàm per has ſubſtitutiones non opus fuiſſet ipſius y valorem derivare. Eſt igitùr, ut breviùs innuam, ipſius æquationis $xxdy - nydx\sqrt{xx-yy} - xydx = 0$; æquatio integralis $\frac{x - \sqrt{xx-yy}}{yx^n} = 1$ vel ad ſalvandam terminorum homogeneitatem erit, ſi lubeat, $\frac{xa^n - a^n\sqrt{xx-yy}}{y} = x^n$ undè eruitur $y = \frac{2x^{n+1}a^n}{a^{2n}+x^{2n}}$ prorſùs ut ſuprà inveneramus.

Digitized by Google

110 Ad obtinendum igitùr valorem lineæ CB ſi n fuerit numerus rationalis, vel integer, vel fractus, vel poſitivus, vel negativus, opus erit tantùm aſſumere AE $=$ quantitati inventæ $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$, quæ tùnc erit algebraica, quia aſſumpta x datur ejus quævis poteſtas $n+1$, vel $2n$, vel quævis alia, cujus exponens ſit in ratione effabili ad unitatem, datur ſcilicèt ope paraboloidis ejuſdem gradus $n+1$, vel $2n$, & mille alijs modis. Sed ſi n eſſet numerus irrationalis, ad inveniendum x^{n+1}, vel x^{2n}, recurendum eſt ad logiſticam, in qua ordinando ad aſymptotum x, & deindè ejus logarithmum ſummendo $\overline{n+1}$ vel $2n$ vicibus, haberemus logarithmos x^{n+1}, x^{2n}, undè quantitatem $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ facilè poſſemus componere, qua ſuper axe AE aſſumpta, ducatur per E ipſi AB parallela, tùm aſumpta AD $= n$x, cẽtro D intervallo DC $=$ x circulus ducatur ſecturus, ductã EC in C puncto curvæ cujus ſemper ipſa CD tangens erit, ac proindè tangens erit ad portionem AD, quam ab axe reſcindit ut n ad 1; quod erat faciendum. Si n ſit $= 2$, erit (poſita a pro unitate) CB $= \frac{2aax^3}{a^4+x^4}$.

Propoſitio IV.

111 POſsumus in multis alijs caſibus uti eadem denominandi regula, qua ſuperiùs uſi ſumus.

mus. Ut ſi jubeamur curvam AC deſcribere cujus ea ſit lex, ut ducta tangente ad quodvis in ea punctum C, ſit quævis poteſtas data *m* hujus tangentis CD, ad quamvis poteſtatem *r* reſectæ AD, ut 1 ad *n* (undè vocando DC $= x$, ſit AD $= n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}$) utile erit ſi vocemus CB ut ſuprà $= \frac{2zx}{zz+1}$, undè BD $= \frac{x-zzx}{zz+1}$, & AB $= \frac{n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}} zz + n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}} + x - zzx}{zz+1}$, cujus differẽtiale $\frac{\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} z^4 x^{\frac{m-r}{r}} dx + \frac{2m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} zzdx + \frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} dx + dx - 4zxdz - z^4 dx}{z^4+2zz+1}$, facta deindè analogia intèr differentiale CB, differentiale AB :: CB, & BD, orietur æquatio $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} z^5 x^{\frac{m-r}{r}} dx + \frac{2m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} z^3 dx + \frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} zdx - z^4 xdz - 2zzxdz - xdz = 0$, quã dividamus per $z^4 + 2zz + 1$, & habebimus $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} zx^{\frac{m-r}{r}} dx = xdz$, ſeù $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-2r}{r}} dx = dz$

$=\frac{dz}{z}$, & integrando $\frac{m}{m-r}\, n^{\frac{1}{r}}\, x^{\frac{m-r}{r}} = lz$. Conſtruetur (nu.57)
igitùr curva quæſita ſi, deſcripta logaritmica cujus 1 ſit ſubtangens, & aſſumpta ad arbitrium x, abſcindatur ex ejus axe portio $= \frac{m}{m-r}\, n^{\frac{1}{r}}\, x^{\frac{m-r}{r}}$ (quæ erit algebraica ſi *m*, & *r* fuerint numeri commenſurabiles) & per ejus extremum ducatur ordinata uſq; ad logiſticã, quę erit z, tùm verò fiat, ut quadratum tangentis, quæ per punctum ſic inventum logiſticæ ducitur, ad rectangulum xz, ità duplum ſubtangentis ad quartam, quæ erit $\frac{2zx}{zz+1}$ ipſa ſcilicet CB, qua aſsumpta in AE, ductaque axi AB parallela AC, & extenſa AD $= nx$, ſi centro D radio x circulus ducatur, hic ſecabit rectam EC in quæſitæ curvæ puncto C.

Propoſitio V.

112 Multotiès etiàm poſt inventam ęquationem, quę quomodo conſtruibilis ſit non conſtet, ope ſubſtitutionis alcuius, reducitur illa ad faciliores terminos, abſque eo quod totam denominationem mutando, ut in anteced. Propoſit: illam funditus evertere, ac variare neceſſum ſit.

Eſto

Digitized by Google

(Fig. 33.) Eſto conſtruenda curua AC, cujus ordinata BC, ſit ad ſubtangentem BT, ut conſtans AG, ad differentiam coordinatarum AB, BC, ſivè ad portionem NC, poſito rectam AN efficere angulum BAN graduum 45. ità ut $y, \frac{ydx}{dy} :: a, y - x$; eritque æquatio $adx = ydy - xdy$. Hanc æquationé diligentèr conſideranti non erit difficile invenire, quæ nam ſubſtitutiones fieri debeant, ut in determinatæ ab invicèm ſeparabiles reddantur. Cum enìm in æquatione adſit ydy quantitas per ſe ipſam integrabilis, reliquum eſt ut quæramus, quomodonam (ſalva integrabilitate termini ydy, & æquatione $adx + xdy = ydy$) reliqui duo termini adx, & xdy ſimul ſumpti poſſint quid integrabile efficere. Membrum porrò xdy non eſt integrabile niſi adſit ſuum correſpondens ydx, tunc enìm hi duo termini ſimùl juncti integrale habent xy. ad hoc igitùr ut hi duo termini $xdy + adx$ ſint integrabiles opus eſt ut quantitas, cuius differentiale in primo termino invenitur ductum in x ſit illa eadem, quę multiplicet dx in ſecundo. Ideò enìm $udt + tdu$ eſt integrabilis quantitas, quia litera t cùjus differentiale in primo termino udt multiplicat u, eſt illa eadem quæ in ſecundo multiplicat du. Debebit igitùr pro dy poni $\frac{adz}{z}$, ſivè pro y poni lz, ſic enìm quantitas adz multiplicabit x (cum debeat illa poni

ni pro dy in termino xdy) & quantitas z, quę eſt in denominatore multiplicabit adx alium terminũ, ſiquidèm æquatio reducatur ad communem denominatorem, remanente ad hùc termino ydy, poſt ſubſtitutionem, & reductionem æquationis ad cõmunem denominatorem, ſaltèm tranſcendenter integrabili.

113 Facta porrò ſubſtitutione lz pro y, & $\frac{adz}{z}$ pro dy, æquatio erit $adx + \frac{xadz}{z} = \frac{lzadz}{z}$, ſivè $zadx + xadz = lzadz$, cujus ęquationis diviſæ (ſi lubeat) utrinquè per a integralis ęquatio eſt $xz \pm aa = zlz - az$, vel etiàm $xz = zlz - az$. Ex hac deducitur $x = lz - a$, ſivè $x = y - a$, ſed ex illa eruitur $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, ex quibus valoribus deſcribetur linea quęſita duplex, altera recta, ex æquatione $x = y - a$, altera curva $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, ſivè $x = y - a \pm \frac{aa}{z}$. At ſi poſuiſſemus $y = -lz$, & pro dx, $-\frac{adz}{z}$, ęquatio $adx = ydy - xdy$, mutata fuiſſet in $zdx - xdz = lzdz$, pro qua integranda eſt opus dividere per zz, nàm $zdx - xdz$ non eſt integrabilis niſi dividatur per zz. erit igitùr æquatio $\frac{zdx - xdz}{zz} = lz$-

$= \frac{lzdz}{zz}$, cujus integrale $\frac{x}{z} = \frac{-lz-a}{z}$ ſivè $\frac{x}{z} \pm 1 = \frac{-lz-a}{z}$. Harum æquationum prima dat $x = -lz - a$, ſivè $x = +y - a$, ſecunda potrò dat $x = -lz - a \pm z = y - a \pm z$.

COROLL.

114 HInc illud manifeſtum fit, quomodò eadem differentialis æquatio poſſit varijs lineis non genere tantùm diverſis quadrare, ſed alteri algebraicæ, alteri tranſcendenti æquè ſatisfacere. Æquatio enim ſuperior $adx = ydy - xdy$, æquè quadrat rectæ $x = y - a$, ac tranſcendentibus curvis $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, & $x = -lz - a \pm z$, poſito lz ibì, hìc verò $-lz = y$, hocque fit, vi conſtantis illius, quæ ſi negligatur in integratione ęquationis, poterit hæc dividi, vel multiplicari per z, evaneſcēte ſic omninò z, & ſola remanente arbitraria lz, cum aliàs ſi conſtans illa adiungatur, remanſura ſit z cū ſuo lz, ac proindè curva algebraica non erit, ſed tantùm tranſcendens.

COROLL. II.

115 VElim etiàm duo diligentèr adnotari. Unum eſt æquatio $x = lz - a$, quę licèt con-

contineat logarithmicam quantitatem nullo modo eſt ad curvam tranſcendentem, ſed ad rectam nullius logarithmicæ indigentem ut ducatur. Quantitas ſiquidèm lz in ſe eſt quantitas ordinaria quin & arbitraria, ſed tantùm eſt tranſcendens reſpectu quantitatis z quia data lz, invenire z, vel data z invenire lz problema eſt tranſcendens; invenire autèm ſimplicitèr lz, ſivè logarithmum arbitrarię z adeò ab omni difficultate liberum eſt, ut arbitraria tantùm linea ſit aſſumenda, quia unaquævis linea, quæ aſſumatur, eſt logarithmus alterius lineæ. Igitùr lz in omni ęquatione pro aliqua curva in qua ęquatione z non compareat non debet cenſeri quantitas tranſcendens, ſed ordinaria, & æquatio illa, non ad curvam tranſcendentem, ſed ad algebraicam, niſi aliud adſit, quod æquationem illam tranſcendentem efficere poſſit.

116 Alterum, quod obſervare conducit eſt, duas æquationes $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, & $x = -lza - a \pm z$, licèt diverſæ videantur, eandem tamèn curvam reſtituere, ſivè prima ęquatione, ſivè ſecunda uti malimus. Iubet enìm poſterior hęc æquatio, ut ſi curvam AC deſcribere velimus cujus ordinata BC ſit ad ſubtangentem BT ut conſtans AG ad differentiam qua BC excedit AB, deſcripta ad aſymptotum KD logiſtica (eſt autèm KD ad GB normalis per A) cujus ipſa AG ſit ſubtangens, quæque ad aſymptotum accedat

ad partes D, qualis eſt IGE, & cujus initium fiat in A, aſſumatur quęvis $AD = - lz = y$, erit enim $DE = z$; tùm additis duabus AD, DE, ex earum ſumma dematur a, reliquumque applicetur in DC, & ſic punctum C erit in optata curva. Prior autèm æquatio iubet deſcribi logiſticam quidèm eiuſdem ſubtangentis AG, ſed quæ accedat ad axem ad partes K, qualis eſt FGH tùm, aſſumpta arbitraria $AD = lz$, & ducta ordinata DF, quę erit z, iubet inveniri tertiam poſt FD, & GA, eamque addi ad AD, & ex ſumma tolli a, ſicque ordinatam DC inventum iri docet. Patet autèm ſi logiſtica GE producatur in I, ſummaturque $AK = AD$, futuram $KI = DF$, ſed cum ſint DA, AK æquales, erit ex logiſticæ proprietate ED, AG :: AG, KI ſivè FD, eſt ergò FD tertia poſt DE, & AG, ſivè viceverſa, ED tertia poſt FD, & AG; cum igitùr debeamus ex vi ęquationis $x = lz - a + \frac{aa}{z}$ hanc tertiam addere ad AD, & hæc tertia ſit ipſa DE, manifeſtum fit, hanc conſtructionem eandem eſſe cum conſtructione æquationis $x = - lz - a + z$, eandemque numero curvam ſubminiſtrare.

117 Æquatio altera $x = y - a$ eſt ad rectam GL, tangentem logiſticam GE in G, ſivè angulum 45. graduum facientem ad punctum G cum recta AG. Hæc recta, quæ & ipſa ſatisfacit quæſito aſymptotus eſt curvę AC per expoſitam conſtructionem prędeſcriptę; poſita $AD = - lz$, cũ ſit $DC = - lz - a + z$, ſi de-

Digitized by Google

ſi demas ex hac lineam DM, reliquum MC erit $= z$, quia DM ſivè illi ęqualis DL eſt $- lz - a$. Auctis autèm per ęqualia intervalla lineis AD, eſt certum, & correſpondentes GM per ęqualia intervalla augeri, quibus cum ordinatę MC $= z$ competant, quę geometricz decreſcunt, patet curvam AC fore logiſticam quandam ad aſymptotum GM, ordinatas tamèn ad illum habentem in angulo ſemirecto inclinatas.

Propoſitio VI.

118 PRoblema præcedentis propoſitionis non multùm variabitur ſi curva ſit deſcribenda in qua reciprocè applicata ſit ad ſubtangentem ut portio NC ad conſtantem. Verùm ſi pro recta AN figuræ 33. ſubſtituatur curva quævis AC, ità ut (fig. 34.) curva quæſita ED hanc habeat proprietatem ut ejus ordinata ità ſit ad ſubtangentem, ut differentia intèr datam ordinatam BC curvæ datæ AC, & quæſitam BD, ad conſtantem a, æquatio ad quam pervenietur, erit quidèm magis compoſita, ſed per eandem tamèn regulam poterit reduci, qua ſuperiore propoſitione ſumus uſi. Vocando igitùr AB $= x$, BD $= y$, BC $= q$ manifeſtum eſt q dari per x, nil aliud enìm importat dari curvam AC quam notum eſſe quomodo ordinata quævis CB dependeat à ſua abſciſſa AB. Proprietas porrò curvæ ED importat ut y, $\frac{ydx}{dy}$ :: y $-$ q, a; undè $ady = ydx - qdx$. Eſt autèm

(r.112.) tèm hic eodem ratiocinio utendum quo ſupra uſi ſumus. Cum enim qdx ſit tranſcendentèr ſaltèm integrabile membrum, reliquum eſt ut talis ſubſtitutio adhibeatur loco dx ut duo membra ady, ydx in æquatione $qdx = ydx - ady$ integrabilia exiſtant; invenietur itaque ſubſtitui poſſe $dx = \frac{adz}{z}$, undè $x = lz$. Facta ſubſtitutione erit $qadz = yadz - azdy$, ubi q datur per z, quia cum notum ſit quomodo q detur per x, & cum x ſit $= lz$, notum etiàm erit quomodo q detur per lz, ac proindè etiàm quomodo detur per z. Dividendo deindè æquationem hanc per zz erit $\frac{qdz}{zz} = \frac{ydz - zdy}{zz}$, undè integrando $\int \frac{qdz}{zz} = -\frac{y}{z}$, aùt $\int \frac{qdz}{zz} \pm 1 = -\frac{y}{z}$, undè vel erit y abſolutè $= -z \int \frac{qdz}{zz}$, vel erit $y = -z \int \frac{qdz}{zz} \pm z$. Si poſuiſſemus $x = -lz$, & $dx = -\frac{adz}{z}$, æquatio fuiſſet $qdz = ydz + zdy$, quæ integrata dediſſet $\int qdz = yz$, vel $\int qdz = yz \pm aa$, & ſic $y = \frac{\int qdz}{z}$ vel $y = \frac{\int qdz}{z} \mp \frac{aa}{z}$.

119 Conſtructio igitùr talis erit ad primam æquat. $y = -z \int \frac{aqdz}{zz}$; fiat ad aſymptotum AB lo-

gi-

giſtica, cujus (exemp. gratiâ) AF ordinata per A ſit ſubtangenti æqualis, quæque producta ab aſymptoto diſcedat ad partes B. Tùm aſſumpta quavis ordinata BG $= z$, erit AB $= lz = x$, & CB $= q$; tùm fiat $z, a :: q$, ad $\frac{aq}{z}$, cui æqualis ponatur BH, fietque ſic curva quædam AH. Elementum ſpatii ABH, erit ipſa BH ducta in differentiale ex AB, ſivè ex lz, quod differentiale eſt $\frac{adz}{z}$. Igitùr hoc elementum erit $\frac{aaqdz}{zz}$, & ſpatium ABH erit $\int \frac{aaqdz}{zz}$, quod ſpatium diviſum per a dat $\int \frac{aqdz}{zz}$; iàm fiat ut a, ad z, ità hoc ſpatiũ per a diviſum $\int \frac{aqdz}{zz}$ ad quartã $\frac{z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$, quę dematur ex z, & erit $z - \frac{z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$ quantitas, quæ ex vi inventæ æquationis eſt $= y$. Aùt etiàm ſufficiet ſimplicitèr quantitatis ipſius $\frac{z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$ negativum abſquè ulla quantitatis z additione applicare in BD punctum enìm D etiàm ſic inventum erit in quæſita curva, cum ſit etiàm ex viſis $y = - \frac{z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$.

COROLL.

120 Curva ſic deſcripta multis in caſibus poterit eſſe algebraica; & ſpetiatìm cum curva data AC fuerit de numero paraboloidum, ſiuè fuerit $q = x^n$, poſito tamèn *n* eſſe numerum integrum, & poſitivum. Cum enìm q ſit $= x^n$ ſive $= lz^n$ quantitas $\frac{aqdz}{zz}$, ſive $az^{-2} lz^n dz$, erit ex vi ſæpè (*nu.* 62.) memoratæ ſeriei, integrabilis & quidèm talitèr ut ejus integrale, prætèr ſimplicem z, quæ totum illud dividet, nulla z prætereà ingrediatur, ſed ſolùm lz. Cum autèm integrale hoc debeat deindè ad obtinendam y multiplicari per z, dividi verò per a, evaneſcet omninò z ex quantitate $-\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$, ſivè ex valore ipſius y, ſola remanente lz, pro qua ponendo x, orietur inter x, & y æquatio purè algebraica, naturam quęſitę curvæ ED determinans. Exemplum ſit caſus, quo AC ſit parabolois expreſſa per $q = \frac{x^3}{aa}$, ſivè $= \frac{lz^3}{aa}$. In quo caſu $\frac{aqdz}{zz}$ erit $= \frac{z^{-2}lz^3dz}{a}$. Hujus quantitatis integrale ſubminiſtrat ſępè citata ſeries, eſtq; $\int\frac{z^{-2}lz^3dz}{a} = \frac{-lz^3 - 3alz^2 - 6aalz - 6a^3}{az}$, igitùr $-\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$ erit $= \frac{lz^3 + 3alz^2 + 6aalz + 6a^3}{aa} = y$

$= y$ (ſi velimus uti ęquatione $y = -z \frac{\int \frac{aqdz}{zz}}{a}$) tùncque ſubſtituendo x pro lz erit æquatio purè algebraica $x^3 + 3axx + 6aax + 6a^3 = aay$ pro curva quęſita.

At ſi utamur alia æquatione $y = z - z \frac{\int \frac{aqdz}{zz}}{a}$ curva non erit algebraica fruſtrà enìm fit ſubſtitutio in quantitate $lz^3 + 3alz^2 + 6aalz + 6a^3$ literæ x pro lz, cum deindè adiungi debeat z, ſicque non omninò tolli poſſit litera z, quo fit ut quantitas x ſit purè tranſcendens, logarithmus nempè ex ipſa z.

Reddit igitùr caſus, quo eadem æquatio differentialis $ady = ydx - qdx$ duabus communis ſit curvis, uni quidèm algebraicæ, alteri tranſcendenti, quod & præcedente Propoſitione interdùm accidere no- (n.114.)
taveramus.

C O R O L L. II.

121 EOdem porrò proceſſu patet quod ſi q conſtiterit ex quotvis terminis, quorum ſinguli habeant x ad quamvis poteſtatem integram, & poſitivam, erit curvarum quæſito noſtro ſatisfacientium altera algebraica, altera tranſcēdens. Quod oſtendetur facilè, applicando cuivis ex his terminis demonſtrationem quam de unico termino x^n mox at-

Digitized by Google

attulimus exemplum ſit, poſito $q = \frac{xx}{a} + x$, ſiuè $q = \frac{xx + ax}{a}$; tùnc enìm, quantitate $\frac{aqdz}{zz}$ exiſtente $= z^{-2} lz^{2} dz + az^{-2} lzdz$, ejus integrale $\int \frac{aqdz}{zz}$ erit $\frac{-lz^{2} - 3alz - 3aa}{z}$, & quantitas $\frac{-z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$ erit $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa}{a}$; hìnc æquatio quæſitæ curvæ erit $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa}{a} = y$, aut $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa + az}{a} = y$, quarum prior per ſubſtitutionem x loco lz in algebraicam vertitur $xx + 3ax + 3aa = ay$.

Propoſitio VII.

122 Conſtruximus præcedenti propoſitione çquationem $ady = ydx - qdx$, eâdemque lege conſtruetur $ady = ydx + qdx$. Nùnc regulam univerſaliorem reddendo, conſtructionem molimur çquationis $aady = bqdx + pydx$, ubi q, & p intelliguntur dari quomodocumque per x; appoſui conſtantes aa, & b ut dimenſionum numerus ubique idem ſervetur. Pro huius æquationis reſolutione, ſivè indeterminatarum ſeparatione, cum bqdx ſit per ſe (tranſcendentèr ſaltèm) integrabilis,

re-

reliquum eſt, ut membra aady, pydx ſimùl ſumpta integrabilia fiant, ſalua æquatione $aady = bqdx + pydx$. hoc obtinebimus dummodò pro $\frac{pdx}{a}$ ponamus $\frac{adz}{z}$, ſivè $lz = \int \frac{pdx}{a}$. ſic enìm $dx = \frac{aadz}{pz}$, & $pdx = \frac{aadz}{z}$. ſubſtituto igitùr pro pdx ejus valore, & pro dx alio etiàm ejus valore, erit æquatio $aady = \frac{bqaadz}{pz} + \frac{aaydz}{z}$ vel $\frac{zdy - ydz}{z} = \frac{bqdz}{pz}$, & $\frac{zdy - ydz}{zz} = \frac{bqdz}{pzz}$, undè integrando $\frac{y}{z} = \int \frac{bqdz}{pzz}$ vel $\frac{y}{z} \pm 1 = \int \frac{bqdz}{pzz}$, quarè vel $y = z \frac{\int \frac{bqadz}{pzz}}{a}$ vel $y = z \frac{\int \frac{bqadz}{pzz}}{a} \pm z$. Hæc æquatio jam conſtrui poteſt, quia aſſumpta x ad libitum, dabitur ſaltèm tranſcendentèr $\int \frac{pdx}{a}$ ſivè lz; data lz, datur & z per logarithmicam; data porrò z, datur $\int \frac{bqdz}{zz}$, & omnes reliquę quãtitates dantur, quas æquatio continet.

123 Erit igitùr talis conſtructiò. Aſſumatur arbitraria x, qua aſſumpta jàm dantur p, & q, qua-

rum utraque datur per x. Fiat proindè primò curva AC, cujus abſciſſis AB exiſtentibus x, ſit CB = p. (*fig. 35.*) Tùm porrò ſpatio ABC ubiquè per a diviſo ęqualis abſcindatur DG ex aſymptoto DG logiſticę EF ſubtangentem habentis ED = a; tùm ducatur applicata GF, quæ erit = z quià ejus logarithmus DG = $\int \frac{pdx}{a}$.

Tùm alia curva HK conſtruatur, in qua abſciſſę quidèm HI = DG = lz, ordinatæ verò IK ſint $\frac{abq}{pz}$; deindè fiat ut aa, ad ſpatium HIK (quod erit = $\int \frac{aabqdz}{pzz}$) ità z ad quartam z $\int \frac{bqdz}{pzz}$, quarta hæc proportionalis erit quæſita y, vel etiàm ſi illi addatur vel dematur z, fiet quæſita ordinata y, quę ſi applicetur in NM, ità ut ejus abſciſſa LM ſit = x, erit LN quæſita curva.

C O R O L L.

124 CUrva ſic deſcripta interdùm poterit eſſe algebraica. Nàm ſi p ſit poteſtas quævis ipſius x, ut ſi fuerit p = $\frac{x^m}{a^{m-1}}$, undè quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ fuerit $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\, a^m}$ = lx, & x = $\overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}}\, a^{\frac{m}{m+1}}\, lz^{\frac{1}{m+1}}$

fuerit autèm et unà ſimùl q quævis poteſtas ipſius

ſius x, ut $q = \frac{x^n}{a^{n-1}}$, undè $= \overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}}$,

in hoc inquàm caſu $\frac{bqdz}{pzz}$ invenietur eſſe quátitas

$\frac{\overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}} b\, a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} dz}{pzz}$, & ſubſtinendo pro p

valorem $\overline{m+1}^{\frac{m}{m+1}} a^{\frac{1}{m+1}} lz^{\frac{m}{m+1}}$, erit etiàm $\frac{bqdz}{pzz}$

$= \frac{\overline{m+1}^{\frac{n-m}{m+1}} b\, a^{\frac{m-n}{m+1}} lz^{\frac{n-m}{m+1}} dz}{zz}$, undè ejus integrale

$\int \frac{bqdz}{pzz}$ invenietur (modò $\frac{n-m}{m+1}$ ſit numerus integer poſitivus) & integrale hoc, prætèr ſimplicem z, quæ erit in denominatore nullam aliam z habebit, ſed tantùm lz; hincq; fit ut hoc integrale per z multiplicatum (qui eſt valor incognitæ y) nullatenùs literam z ſit habiturum, ſed tantùm lz; pro lz verò ponendo ejus valorem $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}.a^m}$ erit æquatio y

$= z \int \frac{bqdz}{pzz}$ purè algebraica, cum interìm alia ęquatio $y = z \int \frac{bqdz}{pzz} \pm z$ ſit tantùm tranſcendens, cum

utramque z, & lz contineat. Ad hoc igitùr ut, exiſtentibus p, & q poteſtatibus ipſius x, linea deſcripta ſecundùm æquationem $aady = bqdx + pydx$ eſſe poſſit algebraica, debet exponens poteſtatis literæ x in quantitate q mulctatus ſimili exponenre quantitatis p, & diviſus per eundem exponentem literæ x in quantitate p unitate auctum, quotientem præbere integrum, & poſitivum. Sit exempli loco $n = -4$, $m = -2$, erit tùnc $\frac{a^2bqdz}{pzz} = \frac{blz^2dz}{zz}$, cujus integrale $\frac{-blz^2 - 2balz - 2baa}{z}$, quod integrale per aa diviſum, & per z multiplicatum dabit $z\int\frac{bqdz}{pzz} = y = \frac{-blz^2 - 2balz - 2baa}{aa}$, vel etiàm $y = \frac{\pm aaz - blz^2 - 2balz - 2baa}{aa}$ proptèr y quę eſt $= z\int\frac{bqdz}{zz} \pm z$. Harum æquationum prior eſt algebraica, quia, poſito pro lz ejus valore $-\frac{aa}{x}$, & pro lz^2, $\frac{a^4}{xx}$, ęquatio illa fiet $2bax - 2bxx - baa = xxy$. Igitùr etiàm ęquatio $aady = bqdx + ypdx$ interdùm curvæ algebraicæ quadrare poteſt, dum ſimùl tranſcendentem aliam æquebenè repræſentat.

CO-

COROLL. II.

125 SEd etiàm ſi q non ſit una quantitatis *x* poteſtas, ſed componatur ex pluribus terminis, quorum unumquemque ingrediatur x ad quamvis poteſtatem elevata, reperietur algebraicam poſſe eſſe lineam æquationis $aady = bqdx + ypdx$. Sit enim q quantitas talis, qualem nunc diximus, & p poteſtas quævis ipſius x prorsùs ut in præcedenti Corollario, exempli gratia ſit $p = \frac{x^m}{a^{m-1}}$, undè $x = \overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}} lz^{\frac{1}{m+1}}$ ut ſuprà inventum eſt; q verò ſit $= \frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{x^r}{a^{r-1}}$ &c. ſicque invenietur eſſe $q = \overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} + \overline{m+1}^{\frac{r}{m+1}} a^{\frac{1+m-r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}}$ &c. undè erit $\frac{bqdz}{pzz} = \frac{\overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} ba^{\frac{m+1-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} dz}{pzz} + \frac{\overline{m+1}^{\frac{r}{m+1}} ba^{\frac{m+1-r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}} dz}{pzz}$ &c. & ponendo pro p valorem $\overline{m+1}^{\frac{m}{m+1}} a^{\frac{1}{m+1}} lz^{\frac{m}{m+1}}$, fiet etiàm $\frac{bqdz}{pzz}$

$$= \frac{\overline{m+1}^{\frac{n-m}{m+1}} ba^{\frac{m-n}{m+1}} lz^{\frac{n-m}{m+1}} dz + \overline{m+1}^{\frac{r-m}{m+1}} ba^{\frac{m-r}{m+1}} lz^{\frac{r-m}{m+1}} dz}{zz}$$ &c.

(nu.62.) &c. quæ etiàm quantitas erit integrabilis ſi $\frac{n-m}{m+1}$, $\frac{r-m}{m+1}$ &c. ſint numeri integri, & poſitivi; cumque in hac æquatione adſit zz in denominatore ſive z^{-2} in numeratore, aderit in integrali z^{-1}, ſive z in denominatore, quarè multiplicato integrali per z, evaneſcet z, & ſola remanſura eſt lz in quantitate $z\int\frac{bqdz}{pzz}$, quæ quantitas, vel eſt y (tuncq; igitùr erit y algebraica) vel erit illi addenda, demendave z ad efficiendam y, quæ tunc proindè erit tranſcendens. Diſcurſus idem eſt quo in Coroll. præced. uſi ſumus. Exemp. ſit quādo $m=2, r=11, n=8$; quantitas p erit $\frac{xx}{a}$, vndè $\int\frac{pdx}{a}=\frac{x^3}{3aa}$. Deindè quantitas $\frac{bqdz}{pzz}$ erit $\frac{9balz^2dz+27blz^3dz}{aazz}$, cujus

(nu.62.) integr. erit $\frac{-27blz^3-90balz^2-180baalz-180ba^3}{aaz}$ $=\int\frac{bqdz}{pzz}$. Hoc integrale ductum in z, & diviſum per a dat $\frac{-27blz^3-90balz^2\ 180baalz-180ba^3}{a^3}$, undè vel y erit æqualis huic quantitati, vel eidem additâ demptâve z, habebitur y; tunq; æquatio erit tranſcendens, cum tamèn niſi addatur, vel dematur z æquatio ſit algebraica; ſubſtituto nempè pro

lz

lz valore $\frac{x^3}{3aa}$ erit æquatio $a^9y + x^9b + 10a^3bx^6 + 60a^6bx^3 + 180a^9b = 0$.

COROLL. III.

126 Vidimus pręcedentibus duobus Corollarijs quomodo curva ęquationis $aady = bqdx + pydx$ poſſit eſſe algebraica, propterea quod quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ ſit algebraica. Sed etiàm ſi hęc quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ non ſit algebraica, adhùc tamèn in varijs caſibus curva per præcedentem ęquationem indicata eſſe poterit algebraica; ut ſi fuerit $\int \frac{pdx}{a}$ quantitas ſimplex logarithmica, hoc eſt $p = aax^{-1}$ undè $\frac{pdx}{a} = \frac{adx}{x}$ & $\int \frac{pdx}{a} = lz = lx$, undè $x = z$ tùnc enim quantitas $\int \frac{\frac{baqdz}{pzz}}{a}$ erit integrabilis modò q ſimùl & ſemèl conſtet quotvis terminis quorum ſingulos x vel z ingrediatur ad quamvis poteſtatem elevata, & nullus ſit terminus in ipſius q valore, quem z, vel x, quæ jàm unum idemque ſunt, nō ingrediatur, cum enim p ſit aaz^{-1}, erit $pzz = aaz$ undè $\frac{baqdz}{pzz}$ erit ſemper, quotcumque tandèm termi-

minorum ſit q, quantitas integrabilis, modò in nullo terminorum ipſam q conſtituentium abſit quantitas z. Si autèm $\frac{baqdz}{pzz}$ eſt algebraicè integrabilis, erit etiàm $\frac{z\int\frac{baqdz}{pzz}}{a} \pm z$ quantitas algebraica, cum z ſit ipſa x, & proindè etiàm y erit quantitas algebraica. Atque tùnc quidem nulla eſſe poteſt difficultas, ſiquidèm poſito $p = \frac{aa}{x}$ ęquatio mutatur in $aady = bqdx \pm \frac{aaydx}{x}$, & ducta æquatione in x, & facta tranſpoſitione $xaady - yaadx = bxqdx$, & diviſio per xx, deindè facta integratione $\frac{aay}{x} = \int\frac{baqdx}{x}$, unde erit $y = \frac{x\int\frac{baqdx}{x}}{aa}$ prorsùs ut prodit per regulam hujus propoſitionis ſubſtituto tantùm pro p valore $\frac{aa}{x}$.

127 At ſi p non quidèm $\frac{aa}{x}$ ſupponeretur, ſed $\frac{naa}{x}$, poſito *n* eſſe numerum quemvis, eſſet $\frac{pdx}{a} = \frac{nadx}{x} = \frac{adz}{z}$, undè ſumpto utroque logarithmo in

lo-

logarithmica cujus eadem a ſit ſubtangens, erit $nlx = lz$, undè, abiectis logarithmis, $x^n = z$; undè y ſivè $\frac{z \int \frac{baqdz}{pzz}}{a} = x^n \int \frac{bqx^{-n}\, dx}{a} + \text{vel} - x^n$, ſi libuerit. Quarè tùnc etiàm curva erit algebraica, modò q conſtet ex quotvis terminis quorum ſinguli ipſam x contineant elevatam ad quamvis poteſtatem, excepta tantummodò poteſtate cujus index ſit $n - 1$.

Propoſitio III.

128 ÆQuatio $b^{n+1} dy = pyb^{n-1} dx + qy^n dx$ reducetur ad æquationẽ ejuſdem formæ cum illa, quam pręcedenti propoſitione conſtruximus; ſubſtituamus enìm loco literæ y valorem $\frac{u^{\frac{1}{1-n}}}{b^{\frac{n}{1-n}}}$, & pro dy $\frac{\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} du}{b^{\frac{n}{1-n}}}$, pro y^n verò $\frac{u^{\frac{n}{1-n}}}{b^{\frac{nn}{1-n}}}$, & facta ſubſtitutione, diviſaq; æquatione per $u^{\frac{n}{1-n}}$ dabitur æquatio $\frac{1}{n-1} bbdu = pudx + bqdx$. Hæc æquatio eſt ejuſdem formæ ac $aady = pydx + bqdx$, quam ſupra conſtruximus, nàm quæ quantitas in ęquatione prop. anteced. vocabatur a, hìc eſt $\sqrt{\frac{bb}{1-n}}$

& quæ ibi erat y nùnc vocatur u, reliquis deindè denominationibus invariatis, ità ut jàm poſſimus hanc ęquationem conſtruere ſecundum regulas ibi traditas; & poſtquàm conſtruxerimus, & invenerimus quantitatem u, ad inveniendam deindè quæſitam y debet tantùm u elevatum ad poteſtatem $\frac{1}{1-n}$ dividi per $b^{\frac{1}{1-n}}$, quotiens enìm erit quæſita ordinata y curvæ $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$.

129 Cum valor u æquationis $\frac{1}{1-n}$ $bbdu = pudx + bqdx$ ſit $z\int\frac{bqdz}{pzz}$, vel etiàm $z + z\int\frac{bqdz}{pzz}$, erit y æqualis utrivis, vel utrique harum quantitatum ad poteſtatem $\frac{1}{1-n}$ elevatæ, & deindè per $b^{\frac{1}{1-n}}$ diviſæ.

COROLL.

130 QUando in æquatione $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$ ſit p quęvis ipſius x poteſtas *m*, & ſimùl q conſtiterit ex quotvis terminis in quorum unoquoq; quantitas x reperiatur ad poteſtates elevata quarum indices *r*, *s*, &c. ſinguli numero *m* minuti diviſibiles ſint per *m* + 1, & inſuper *n* fuerit numerus rationalis, curva per hanc ęquationem expreſſa poterit eſſe algebraica. Facta enim

enim ſubſtitutione, & reductione ęquationis ad ſimpliciorem $\frac{1}{1-n}$ bbdu $=$ pudx $+$ bqdx, hujus ęquationis radix u valorem unum algebraicum obtinet ex ſupra viſis; quarè, ſi elevetur ad poteſtatem exponentis rationalis $\frac{1}{1-n}$ (erit autèm rationalis exponens, quotiès *n* ſit numerus rationalis) & dividatur per algebraicam quantitatem $b^{\frac{n}{1-n}}$, fiet valor unus literę y algebraicus. Secùs verò ſi utamur alio valore literę u tranſcendente, quo ad valorem ipſius y etiam tranſcendentem perducemur: ponamus exempli vice $m = 1$, ſivè $p = x$, r verò $= 3$, & $s = 5$, hoc eſt $q = \frac{2bbx^3 - x^5}{4b^4}$, n verò $= \frac{1}{2}$; ità æquatio $b^{n+1} dy = pyb^{n-1} dx + qy^n dx$ mutabitur in $b^{\frac{3}{2}} dy = xyb^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{2bby^{\frac{1}{2}} x^3 dx - x^5 y^{\frac{1}{2}} dx}{4b^4}$; ponendo igitùr pro y valorem $\frac{uu}{b}$, ęquatio fiet $2bbdu = uxdx + \frac{2x^3 bbdx - x^5 dx}{4b^3}$, quę eſt æquatio ejuſdem formæ ac $aady = ypdx + qbdx$; quæ enìm hìc eſt aa ibì eſt 2bb, quæ hìc y ibi u, & quæ hìc b ibì etiàm b vocatur, quæ verò hìc p, & q, ibì x, &

(n. 125.) (n. 122.)

2x-

$\frac{2x^3bb - x^5}{4b^4}$ audiunt. Reſolvamus igitùr æquationem $2bbdu = uxdx + \frac{2x^3bbdx - x^5dx}{4b^3}$; erit porrò $\int \frac{pdx}{a}$ ſive $\int \frac{xdx}{\sqrt{2bb}}$ hoc eſt $\frac{xx}{2\sqrt{2bb}} = lz$, undè erit $x = \sqrt{2lz\sqrt{2bb}}$, & $\frac{qbdz}{pzz} = \frac{lzdz\sqrt{2bb} - 2lz^2dz}{bzz}$; quantitatis huius integrale $\int \frac{qbdz}{pzz}$ (poſito logarithmos ſumi in logarithmica, cuius $\sqrt{2bb}$ ſit ſubtangens) eſt $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{bz}$, ac proindè $z\int\frac{qbdz}{pzz}$ erit $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b} = u$, vel etiàm $u = \frac{bz + 2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b}$. Horum valorum prior eſt algebraicus, ſubſtituto tantùm pro lz valore $\frac{xx}{2\sqrt{2bb}}$ fitque æquatio $\frac{x^4 + 6bbxx + 24b^4}{4b^3} = u$; cum autèm $\frac{uu}{b}$ ſit y æquationis propoſitæ, erit tandèm quæſita curvæ æquatio tantùm algebraica $y = \frac{x^8 + 84b^4x^4 + 576b^8 + 12bbx^6 + 288b^6xx}{16b^7}$; Interìm ſi ex alio valore $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb + bz}{b}$

erua-

eruamus valorem quęſitæ y, habituri ſumus ęquat. $b^3 y = 4lz^4 + 36b^4 + bbzz + 12lz^3\sqrt{2bb} + 42lz^2bb + 4lz^2bz + 36lzbb\sqrt{2bb} + 6lzbz\sqrt{2bb} + 12b^3z$ trāſcendentem curvæq; tranſcendenti inſervientem.

Exemplum hìc afferam non ſanè iniucundum, ut appareat interdùm ope hujus, & ſimilium regularum ad curvas nos deductum iri, quas algebraicas certè non exiſtimabamus, & proindè integrabiles eſſe quaſdam æquationes inveniemus quas tanquam non integrabiles antè reieceramus.

131 Fingamus nobis curvas MQ, PR eſſe parabolas quarum parametri ipſius quidèm MQ ſit AM, PR verò ſit PA, & ſic infinitæ aliæ ad eundem axem AP parabolæ intelligantur, quarum parametri reſpectivis à fixo puncto A verticum diſtantijs æquales ſint, ducenda ſit curva omnes tales parabolas ad angulos rectos ſecans. Eſto in quæſita curva punctum Q, & per illud ducta intelligatur parabola genitrix MQ ita ut MA ſit ejus parameter, & vocetur abſciſſa curvæ quæſitæ à puncto A in axe AP $= x$ & ejuſdem curvæ ordinata $= y$, itaque ejus ſubnormalis erit $= \frac{ydy}{dx}$ debet autèm proptèr normalitatem curvarum eſſe hæc ſubnormalis ipſa ſubtangens puncti Q in curva MQ, ergò, vocando MA parametrum ipſius parabolæ MQ $= u$, & reliqum abſciſſæ $= x - u$, & ejus duplum, ſubtangens ſcilicèt puncti Q in parabola MQ $= 2x - 2u$, erit hęc ſub- (Fig. 9.)

Digitized by Google

tangens $2x - 2u = -\frac{ydy}{dx}$, eſt autèm abſciſſa in parabola hoc eſt $x - u$ in parametrum u ducta $= yy$, ergò $xu - uu = yy$ & indè fiet $u = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, quo valore in locum u ſubſtituto in æquatione $-\frac{ydy}{dx} = 2x - 2u$ ſuperiùs inventa, erit $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ ęquatio pro curva quæſita, quam quidèm, ſi integrabilis eſſet, integraremus utiquè, & curvam quęſitam purè algebraicam erueremus. Verùm non conſtat eſſe integrabilem, nec qua via poſſint indeterminatæ cum ſuis differentialibus ab invicèm ſeparari, qua propter ad tollenda ſigna radicalia pono $\frac{1}{4}xx - yy$ eſſe quadratum, & invenio $x = \frac{tt+yy}{t}$, & $\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy} = \frac{yy-tt}{2t}$, undè æquatio propoſita mutabitur in hanc pro curva quęſita æquationem $2ttdt + 5tydy - 2yydt = 0$ & $dy = \frac{2}{5}t^{-1}ydt - \frac{2}{5}ty^{-1}dt$; in
(n.128.) qua ſi pro y ponamus $\sqrt{r}$ & pro dy ponamus $\frac{dr}{2\sqrt{r}}$ fiet ęquatio $dr = -\frac{4}{5}t\,dt + \frac{4}{5}t^{-1}r\,dt$

eiuſ-

ejuſdem formæ ac ſuperiùs hac propoſitione conſi- (n.122.)
derata ęquatio $aady = bqdx + pydx$, quæ enim in æquatione canonica eſt aa hìc eſt $= 1$, quæ ibi eſt y hìc eſt $= r$, quæ ibì $= b$ hìc $= 1$, quæ ibì x hìc eſt $= t$, quæ ibì q hìc eſt $= -\frac{4}{5}t$, & quæ tandèm ibì eſt $= p$ hìc eſt $= \frac{4}{5}t^{-1}$. Itaque, ſi ponamus $\frac{pdx}{a} = \frac{adz}{z}$, ſivè $\frac{4}{5}t^{-1}dt = \frac{dz}{z}$, ſivè $\frac{4}{5}lt = lz$ in ſubtangente 1, invenietur, abiectis logarithmis, $t^{\frac{4}{5}} = z$, & $dz = \frac{4}{5}t^{-\frac{1}{5}}dt$. Eſt autèm in æquatione $aady = bqdx + pydx$ quantitas $y = z\int\frac{\frac{bqadz}{pzz}}{a}$, vel $y = z\int\frac{\frac{bqadz}{pzz}}{a} \pm z$, ergò, ſi pro z & dz ſubſtituas valores mòx aſsignatos, & deindè pro a, b, q, & p etiàm ſuos valores, habebis r in æquatione $dr = -\frac{4}{5}tdt + \frac{4}{5}t^{-1}rdt = t^{\frac{4}{5}}\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$ vel $= t^{\frac{4}{5}}\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt \pm t^{\frac{4}{5}}$; eſt autèm $\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$

$= a$

$= a^{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} t^{\frac{6}{5}}$ (addita conſtante ad lubitum $a^{\frac{6}{5}}$)

itaq; hoc integrali in $t^{\frac{4}{5}}$ ducto, fiet $r = a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt$.

Hìc additio ipſius z, vel $t^{\frac{4}{5}}$ eſſet fruſtranea cum ſolum membrum $a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}}$ poſsit augere. Inventa itaque *r*, ad habendam y erit opus ipſius *r*, ſeù $a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt$ radicem eruere, eritque hæc radix $y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt}$, & cum ſit $x = \frac{tt + yy}{t}$, invenietur $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} t$; itaq; aſſumpta t ad libitum, & abſciſſa quantitate $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} t$ ſi fiat $y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt}$ erit punctum in optata curva, & ſi rem ſyntheticè nùnc experiamur inveniemus curvam ſic conſtructam habere ſuam ſubnormalem æqualem ſubtangenti parabolæ genitri-

cis

cis MQ. Quod ſi ex æquat. $x = \frac{tt + yy}{t}$ eruatur valor $t = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, & hìc deindè ſubſtituatur ritè in ęquatione $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}t$ fiet æquatio pro curva quæſita algebraica quidèm eritque factis debitis præparationibus, & operationibus

$$\overline{\tfrac{5}{2}x - \sqrt{\tfrac{1}{4}xx - yy}} : \sqrt[5]{\tfrac{1}{2}a^{4}x + a^{4}\sqrt{\tfrac{1}{4}xx - yy}} = aa.$$

Cum verò ſuperiùs invenerimus hujus curvæ ęquationem differentialem eſſe $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ ſequitur hanc ęquationem, ſi integretur, reſtituere illam quam modo invenerimus, quod ſi experiamur, differentiando ſuperiùs allatam, inveniemus optimè ſuccedere, quarè patet, & ęquationem $aady = bqdx + pydx$ interdùm curvam tantùm algebraicam repręſentare, nullam ſimùl admittens tranſcendentem, quę ſatisfaciat quæſito.

F I N I S.

DD.

DD. Rondellus, & Verzalia præſentis Operis de Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus *in Philoſophica Inquietorum Academia Cenſores electi, omnia in ipſo contenta ejuſdem Academiæ legibus, atque Inſtitutis conformia eſſe retulerunt.*

V. F. Stancarius à Secretis.

V. D.

Digitized by Google

V. D. Franciſcus Aloyſius Barelli Cler. Reg. Cong. S. Pauli, & in Metropol. Bononien. Pœnitentiarius prò Eminentiſſimo, & Reverendiſsimo Dom. D. Cardinali Iacobo Boncompagno Archiepiſcopo, & Principe.

CUm ego infraſcriptus Sanctiſsimæ Inquiſitionis Reviſor Ordinarius legerim librum inſcriptum *De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, Authore Gabriele Manfredio,* ipſumque obſervaverim dumtaxat firmam, perutilemque ſcientiam continere, hac de cauſa publici juris fieri poſſe dijudicavi.

Hiemynianus Rondelli.

Stante præfata Atteſtatione

Imprimatur.

F. Antonius Leonius Inquiſitor Bononiæ.

Digitized by Google

Monitum ad Lectorem.

Pag. 166. lin. 23. in quantitate $\frac{ndx\sqrt{xx-yy}+xdy-ydy}{\sqrt{xx-yy}}$ pro termino xdy lege xdx. Reliqua Ortographica vel alius generis ſphalmata benignus Lector facilè, ut puto, advertet, corriget, atque ignoſcet.

Digitized by Google

Restauro del Libro
Badia
di
Cava